Giulia Bertagnolli

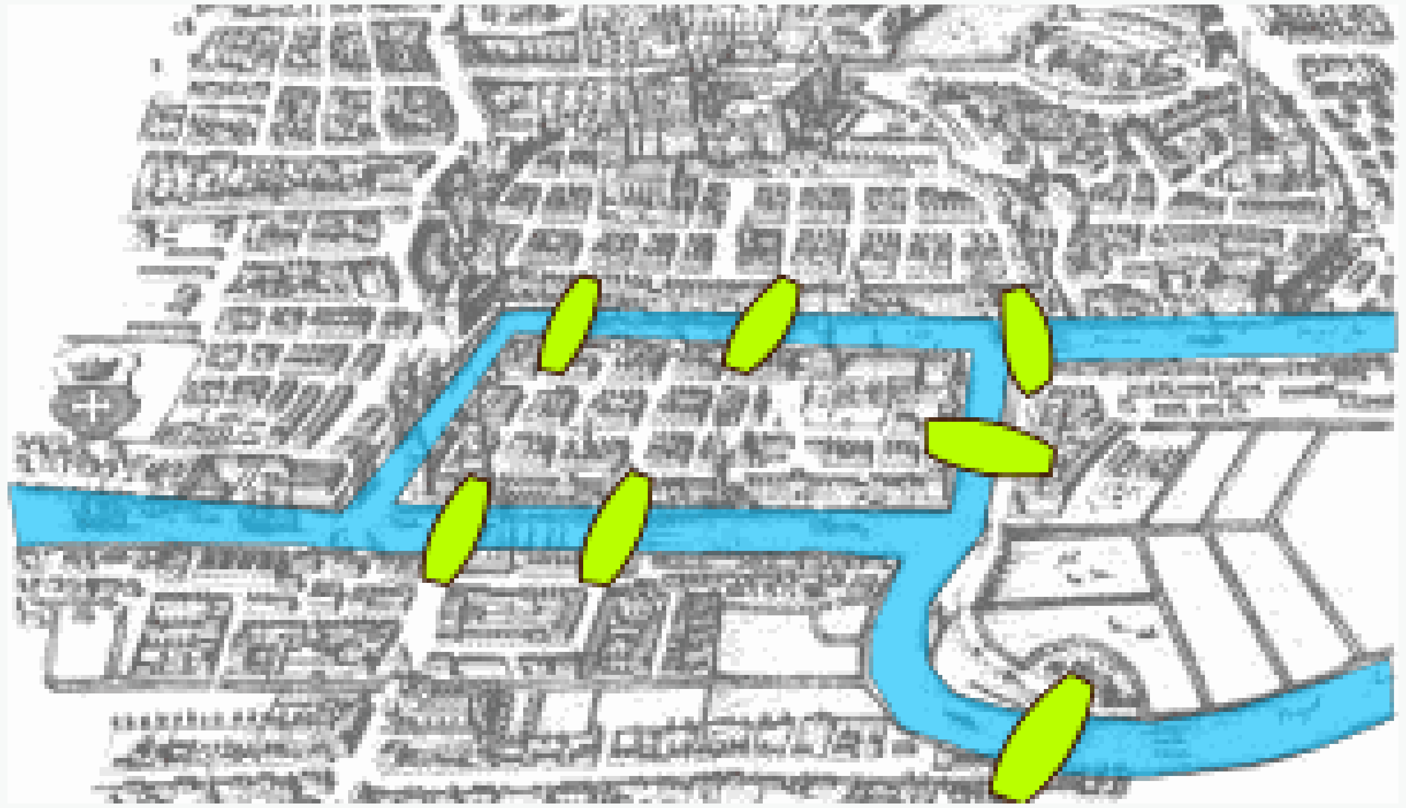
Jr Researcher @ DIMA, Università degli Studi di Genova

GRAFI, RETI E SISTEMI COMPLESSI

Open Week DIMA UniGe - 12-15 febbraio 2024

@GiuliaTtt

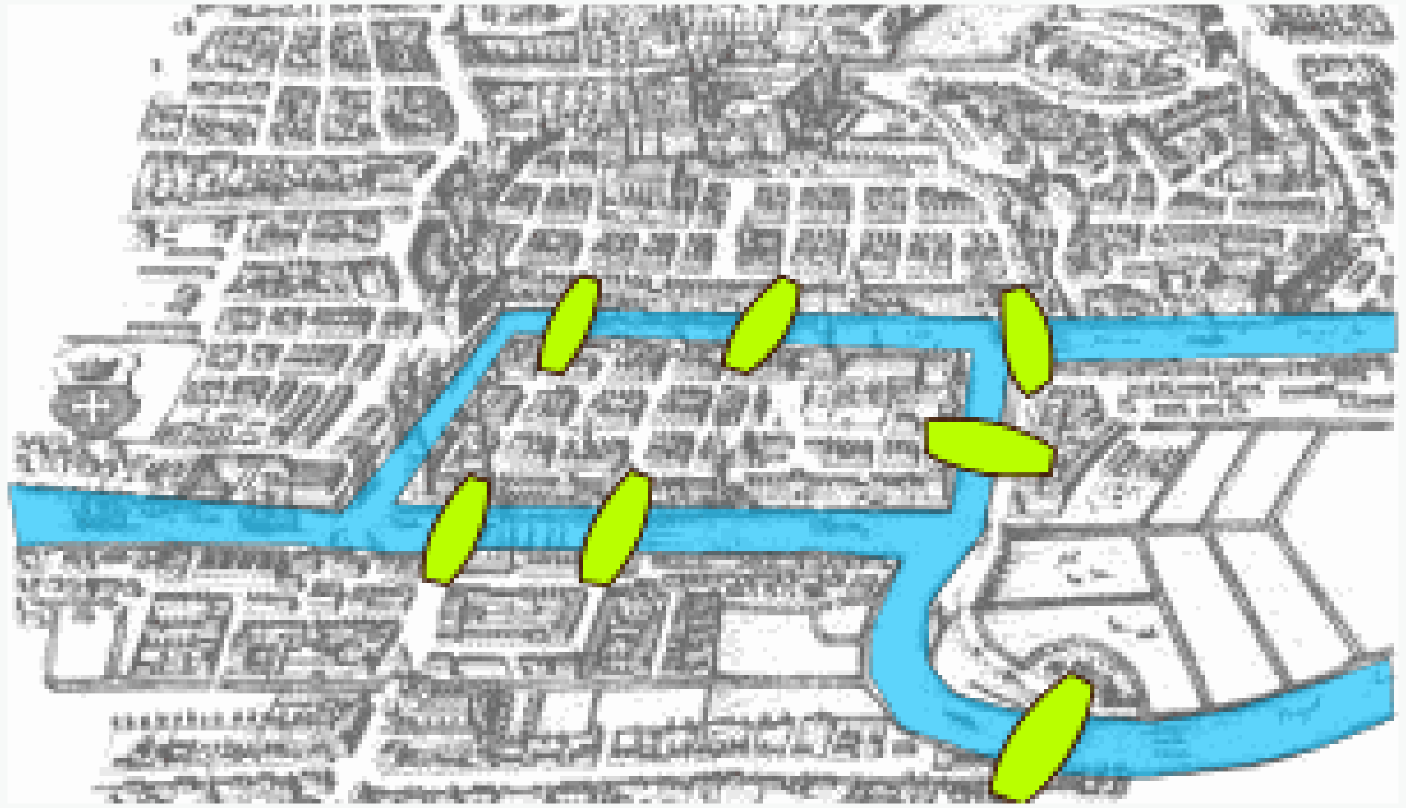
gbertagnolli.github.io

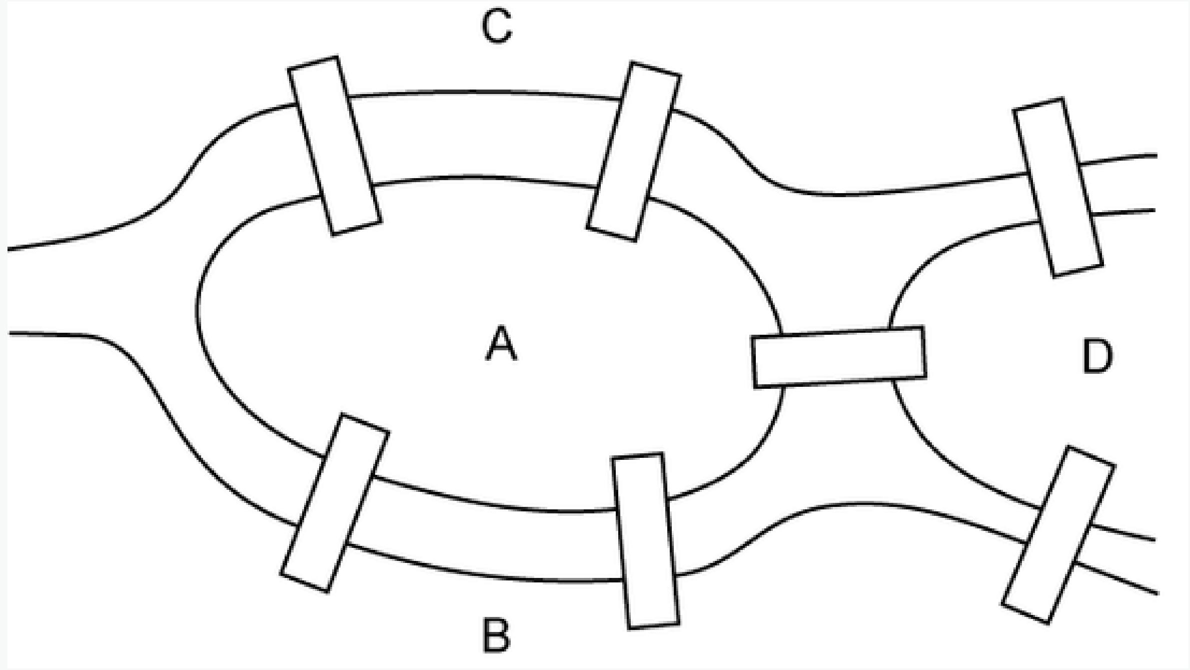


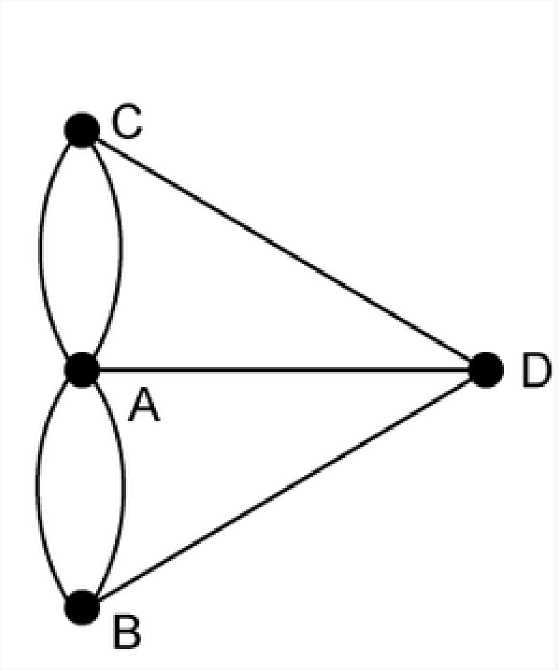
I Ponti di Königsberg

LEONHARD EULER (1736)

È possibile fare un giro della città di Königsberg, attraversando tutti i ponti una e una sola volta (tornando al punto di partenza)?





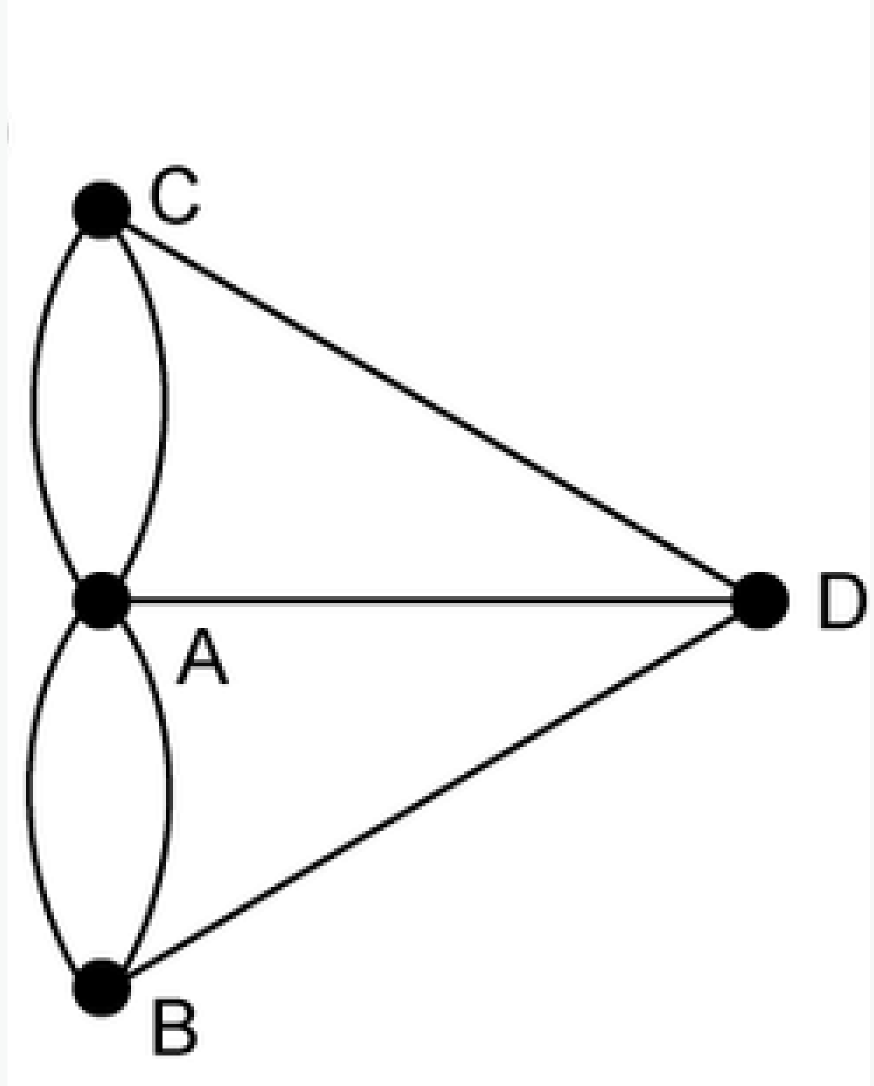


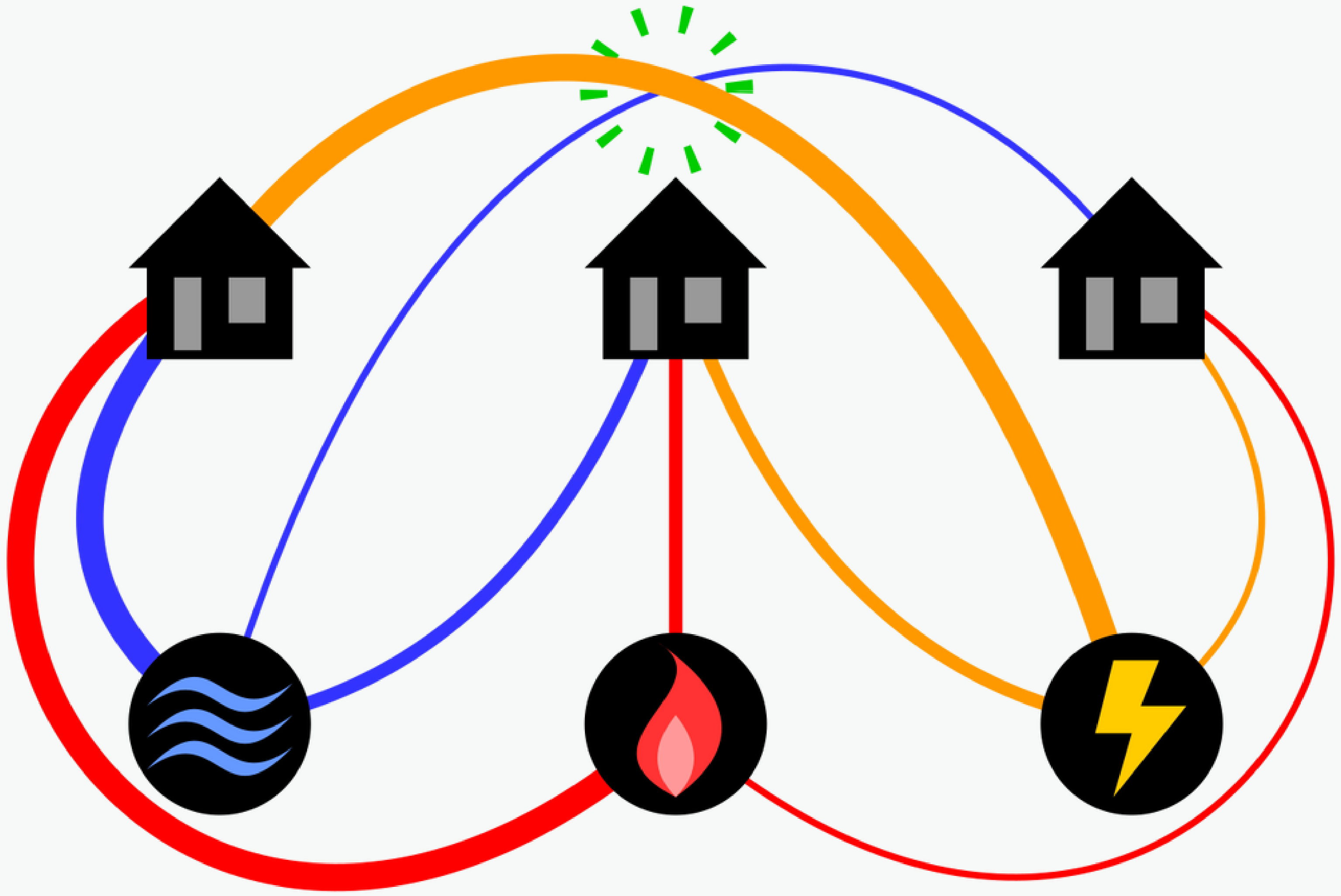
Da un **problema** alla sua **astrazione**!

Riformuliamo la domanda in termini matematici:

Esiste un cammino Euleriano sul multigrafo in figura?

Un cammino Euleriano (in onore di Eulero) è un cammino che tocca tutti i suoi archi una e una volta sola.





Water-Gas-Electricity puzzle
(o le tre fonti d’energia)

KURATOWSKI (1930)

È possibile collegare ogni casa a ogni fonte d’energia senza che ci siano incroci?

Puzzle noto e considerato “vecchio” già agli inizi del 900.

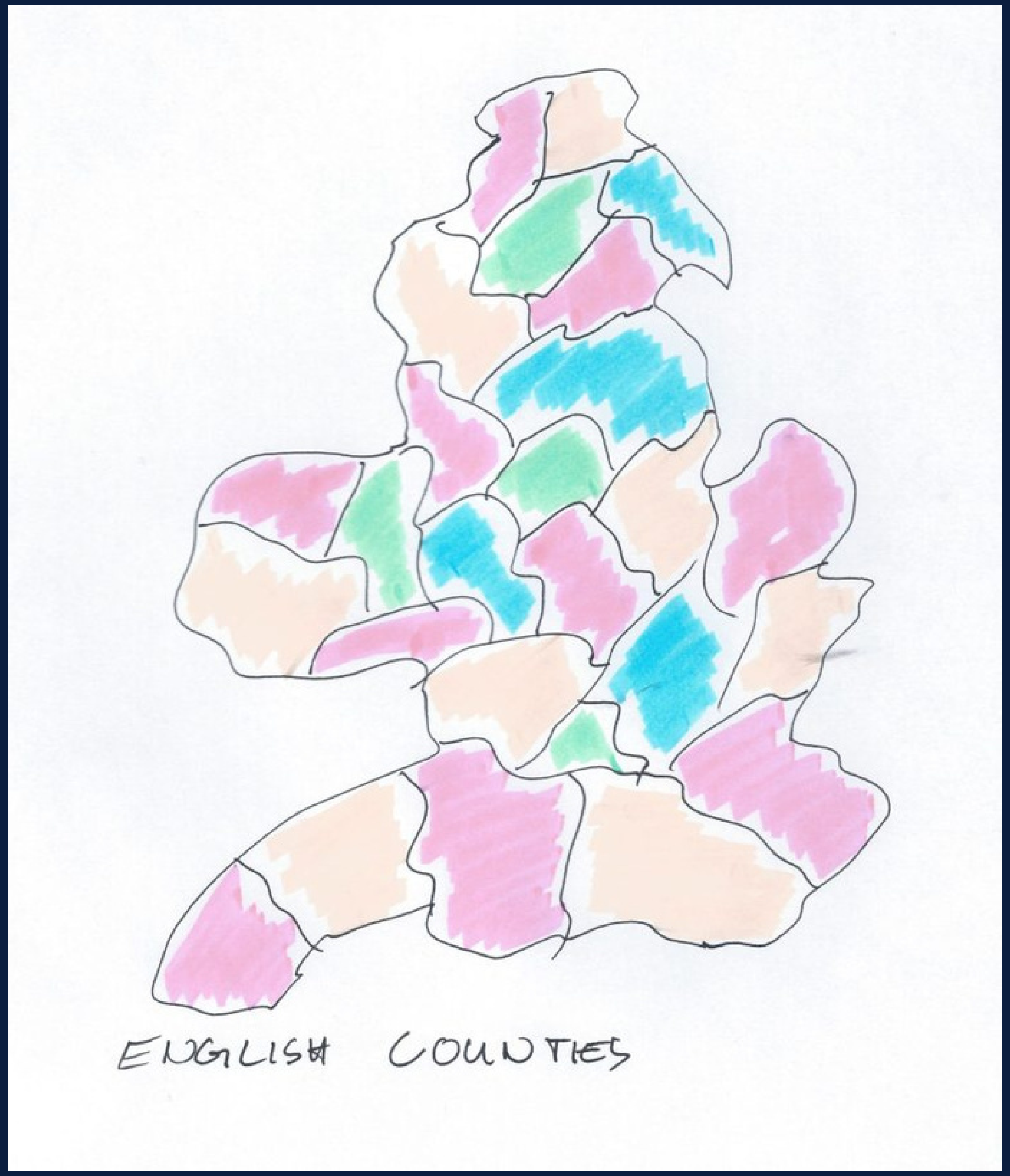
MAPPE E COLORI

Il Teorema dei Quattro Colori

Vediamo come si costruisce una dimostrazione!

Problema, intuizione, astrazione

Francis Guthrie (1852)



4 colori

Funzionerà **per ogni** mappa?

Problema

Francis e i 4 colori

Intuizione

Difficile...
Problema irrisolto
per più di un secolo!

Semplificazione

Teorema dei 5 colori

IL TEOREMA DEI CINQUE COLORI

Dato un piano suddiviso in regioni connesse, queste possono essere colorate utilizzando **non più di cinque colori**, in modo tale che *non esistono due regioni adiacenti con lo stesso colore.* *

*References

Wikipedia, Teorema dei cinque colori

Dimostriamolo!

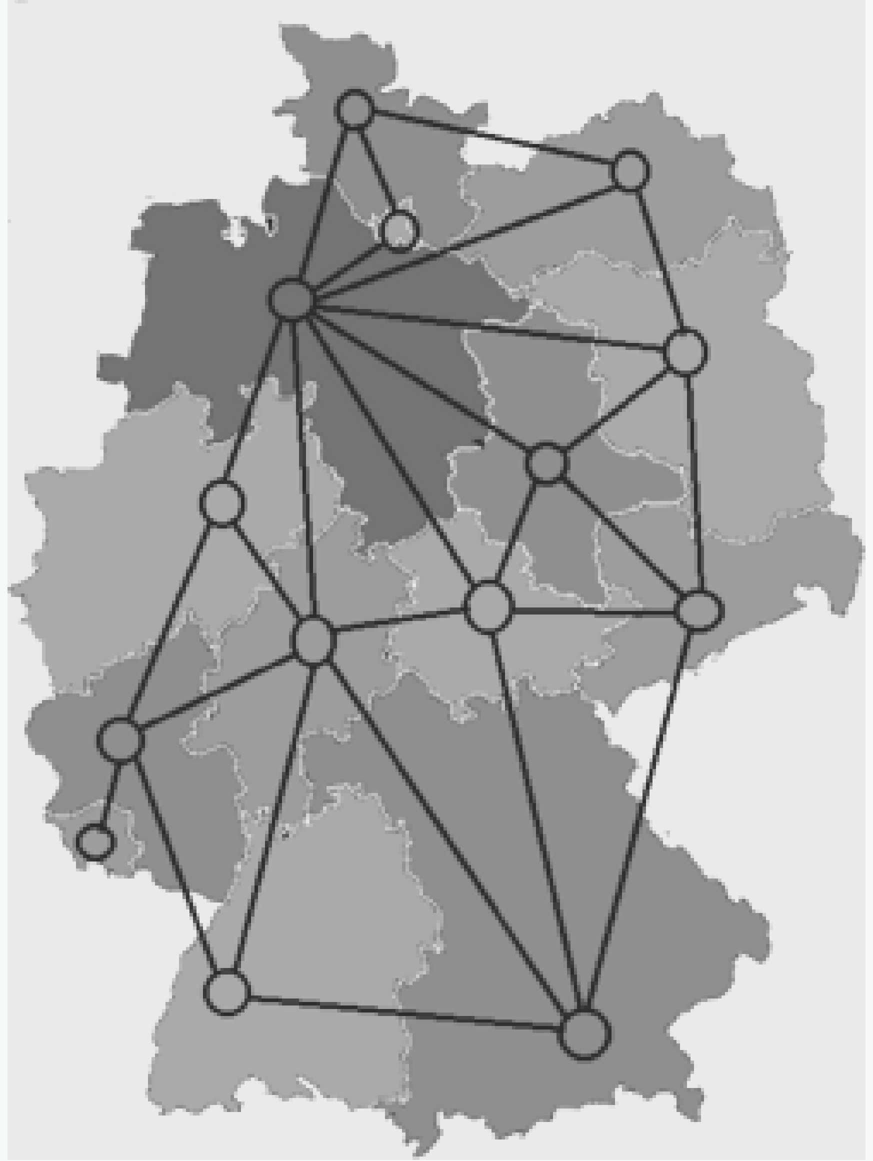
Ingredienti:

0. astrazione
1. induzione
2. assurdo
3. invarianza

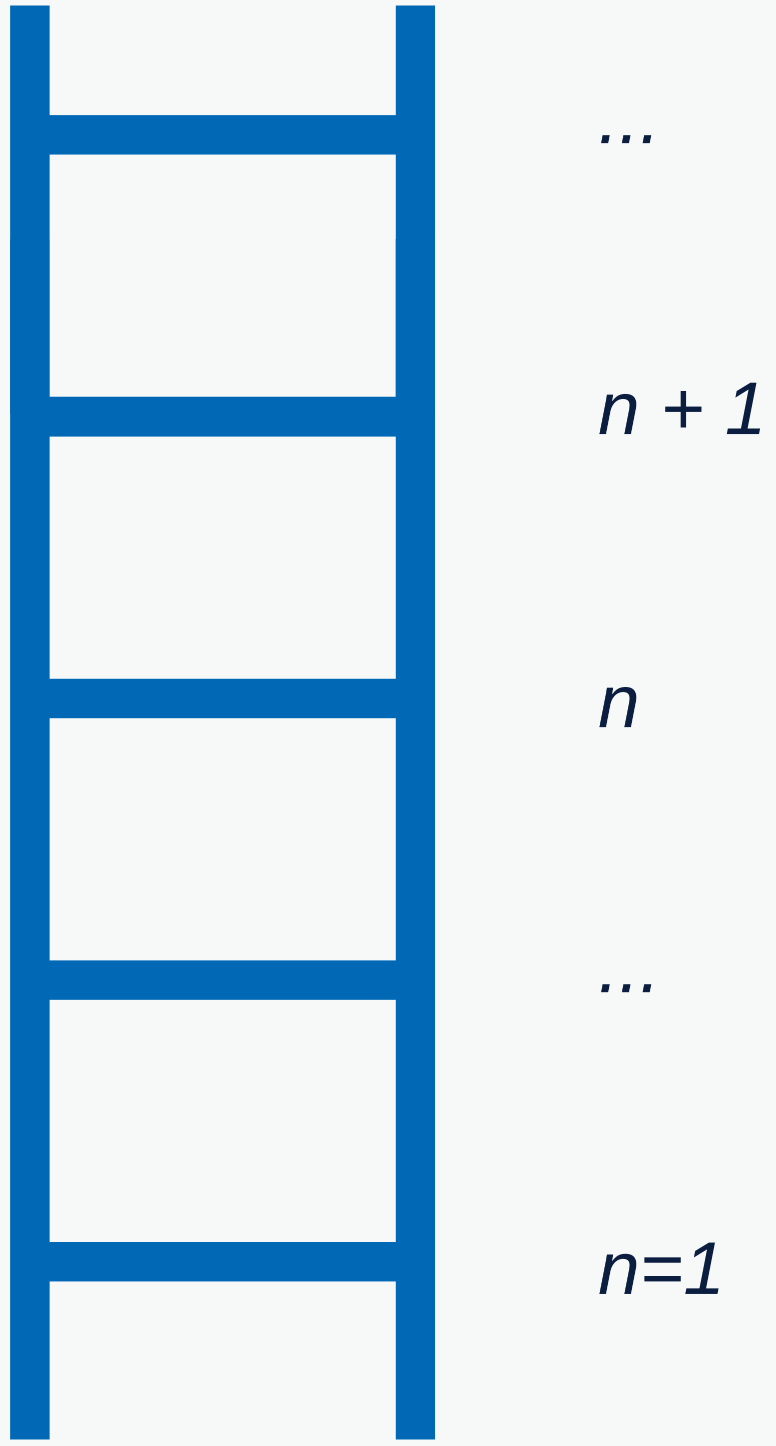
Astrazione

Dato un **grafo planare**, i suoi vertici possono essere colorati con al più cinque colori, in modo che vertici adiacenti non abbiano lo stesso colore.

grafo = rete (EN - network)
grafo **planare** = che può essere disegnato su di un foglio (un piano) senza che gli archi (edges, links) si intersechino



Induzione



Se riesci a fare il primo gradino, riuscirai a fare ogni altro gradino **dopo di quello.**

Assurdo

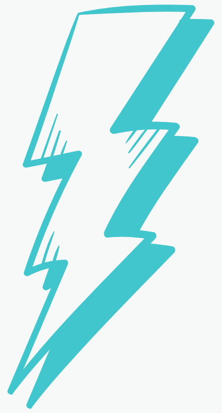
Non esiste il numero più grande.

Assumiamo il suo opposto:

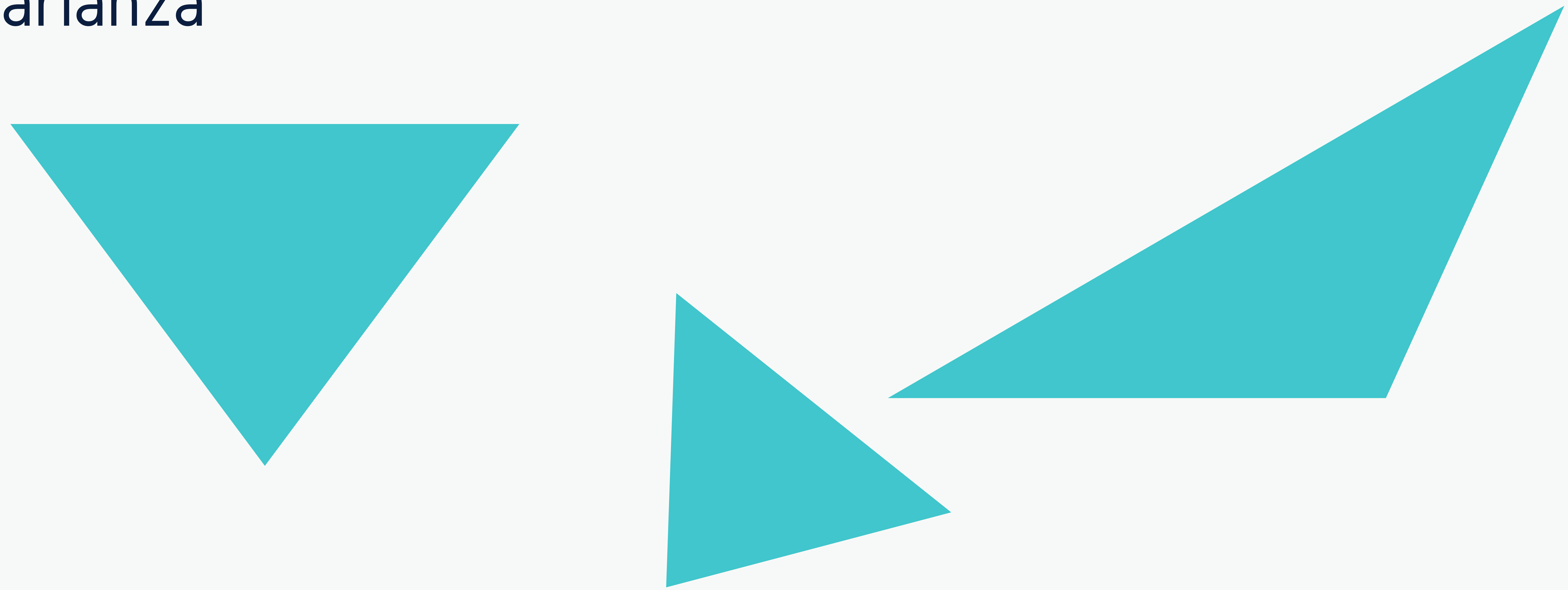
Esiste il numero più grande,
chiamiamolo ***M***

E... arriviamo ad un **assurdo**!

$$M > M + 1$$
$$0 > 1$$



Invarianza

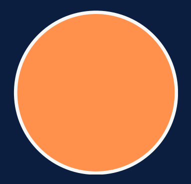


Esempio: Un esempio classico di propriet'à di invarianza è quella sulla somma degli angoli interni dei triangoli.

Dimostrazione del Teorema dei 5 colori

Induzione sul numero ***n*** di nodi.

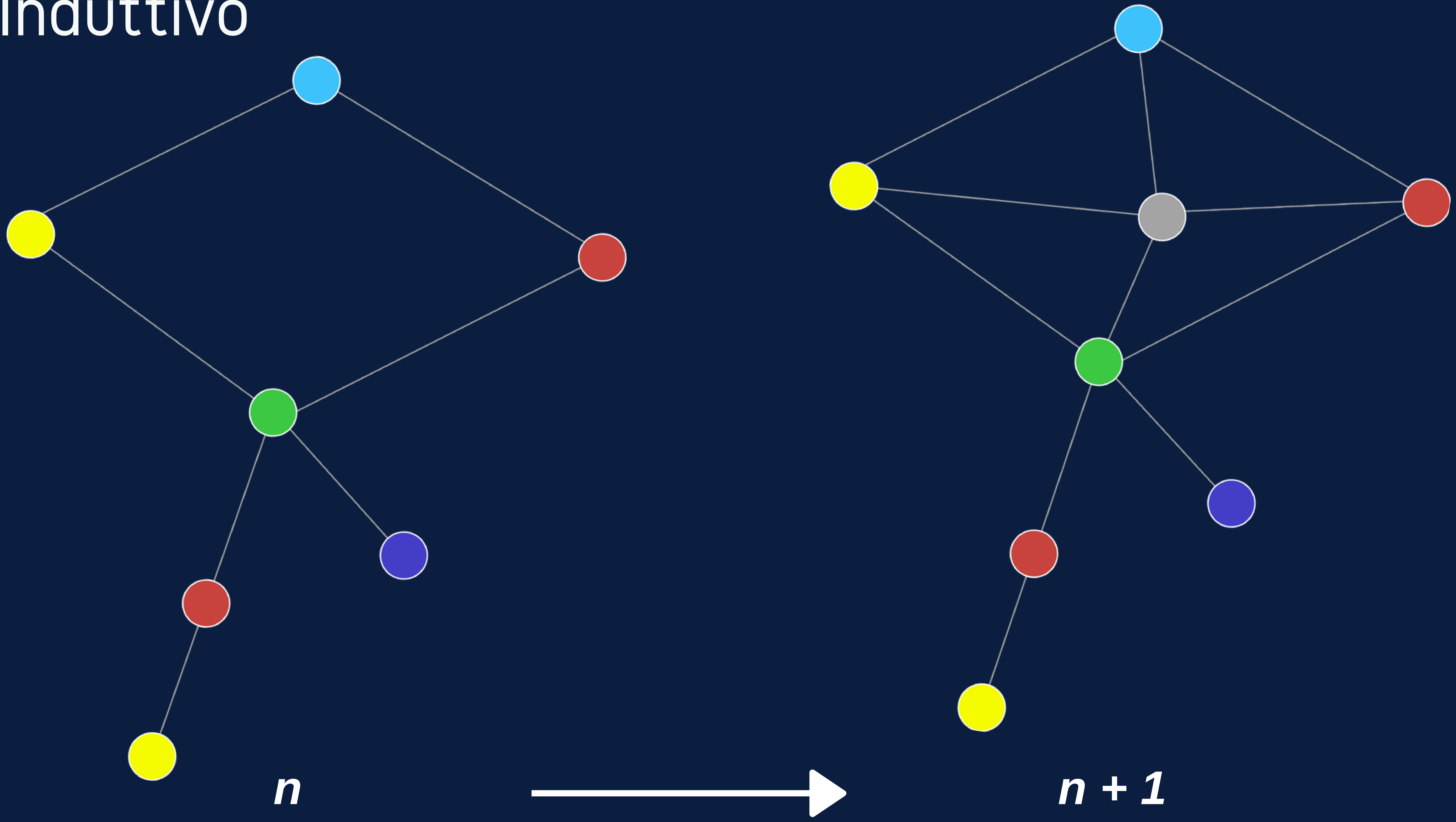
Ogni grafo con ***n=1*** nodi può essere colorato con al più cinque colori



Passo Induttivo

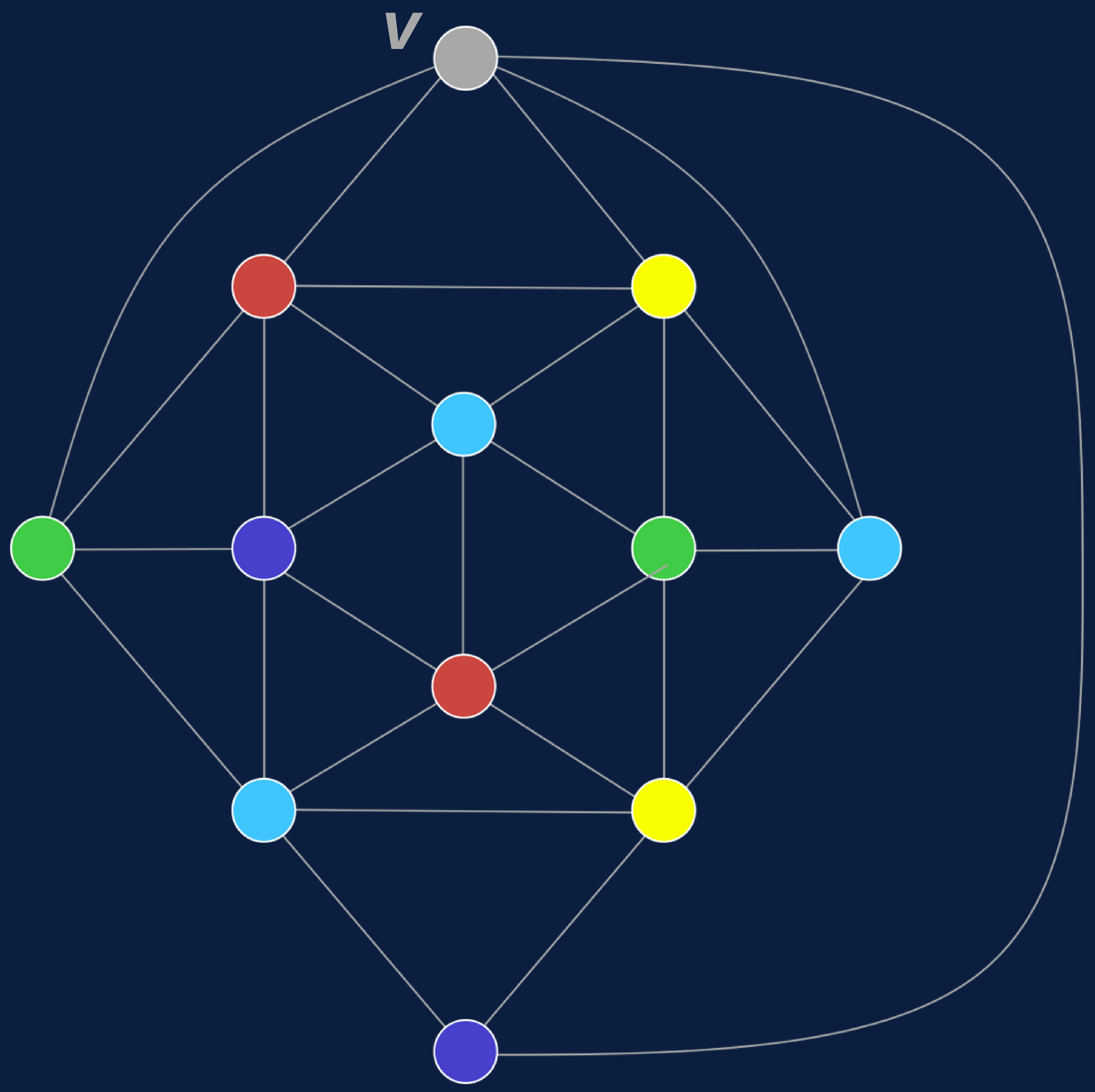
Assumiamo che ogni grafo con n nodi sia colorabile con al più cinque colori e dimostramo che un grafo con n+1 nodi può ancora essere colorato con cinque colori.

Passo Induttivo



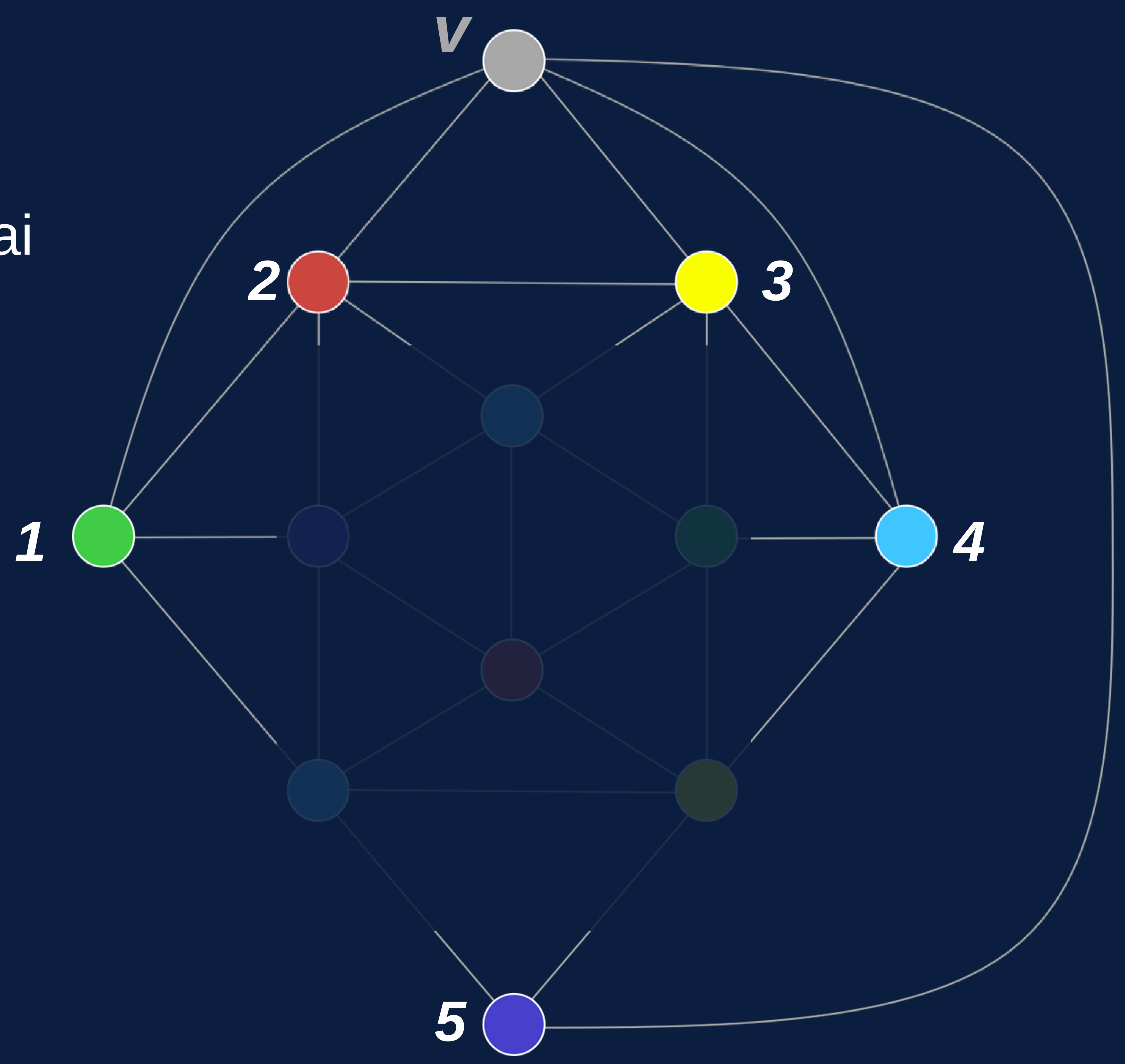
$n + 1$

Rimuovendo ***v***, otteniamo un grafo con ***n*** vertici e 5- colorabile



$n + 1$

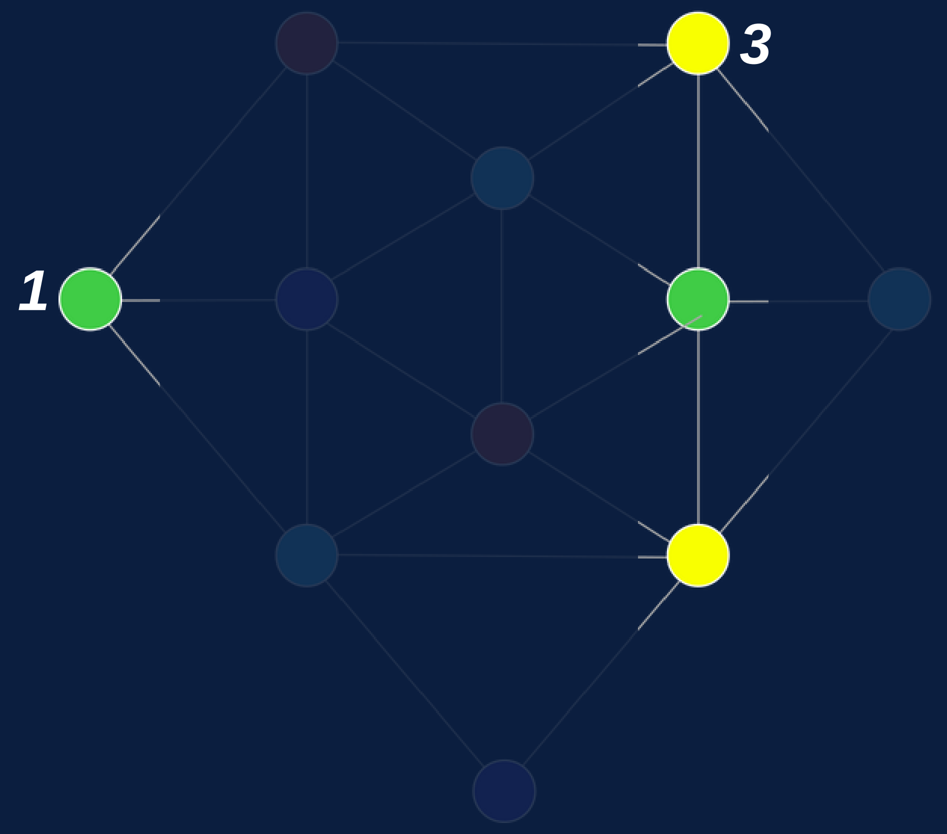
Tutti i colori sono presi dai
5 vicini del nodo ***v***

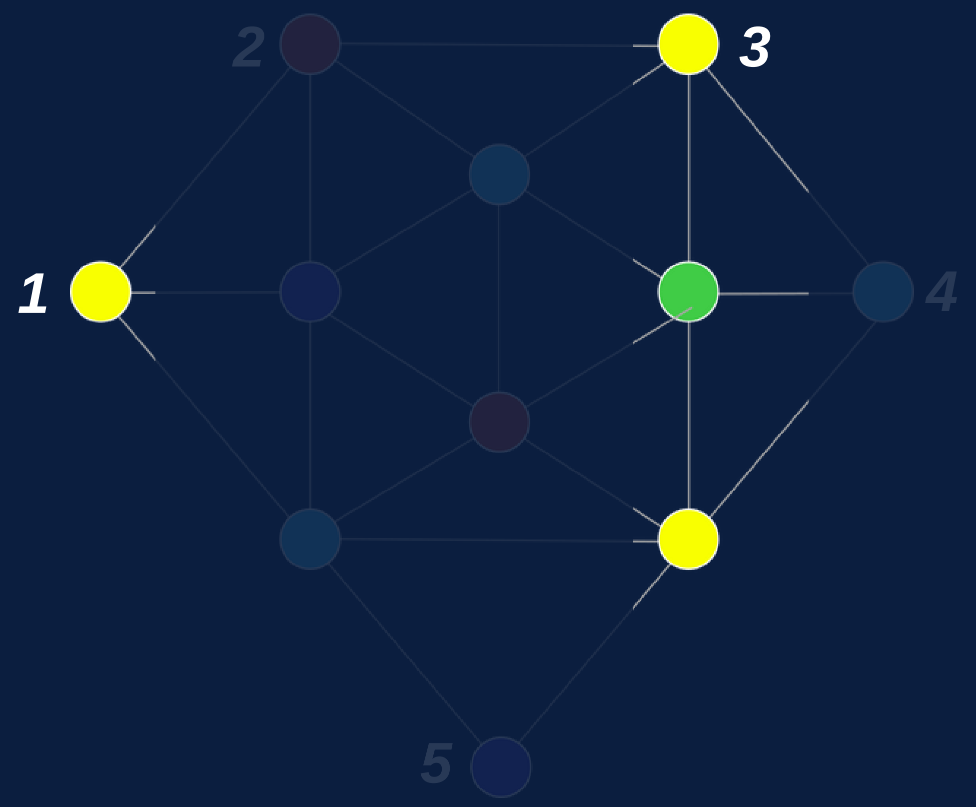


n + 1

Guardiamo ai vertici ***1*** e ***3***

1 non è connesso ad alcun vertice giallo, per cui possiamo colorarlo di giallo!

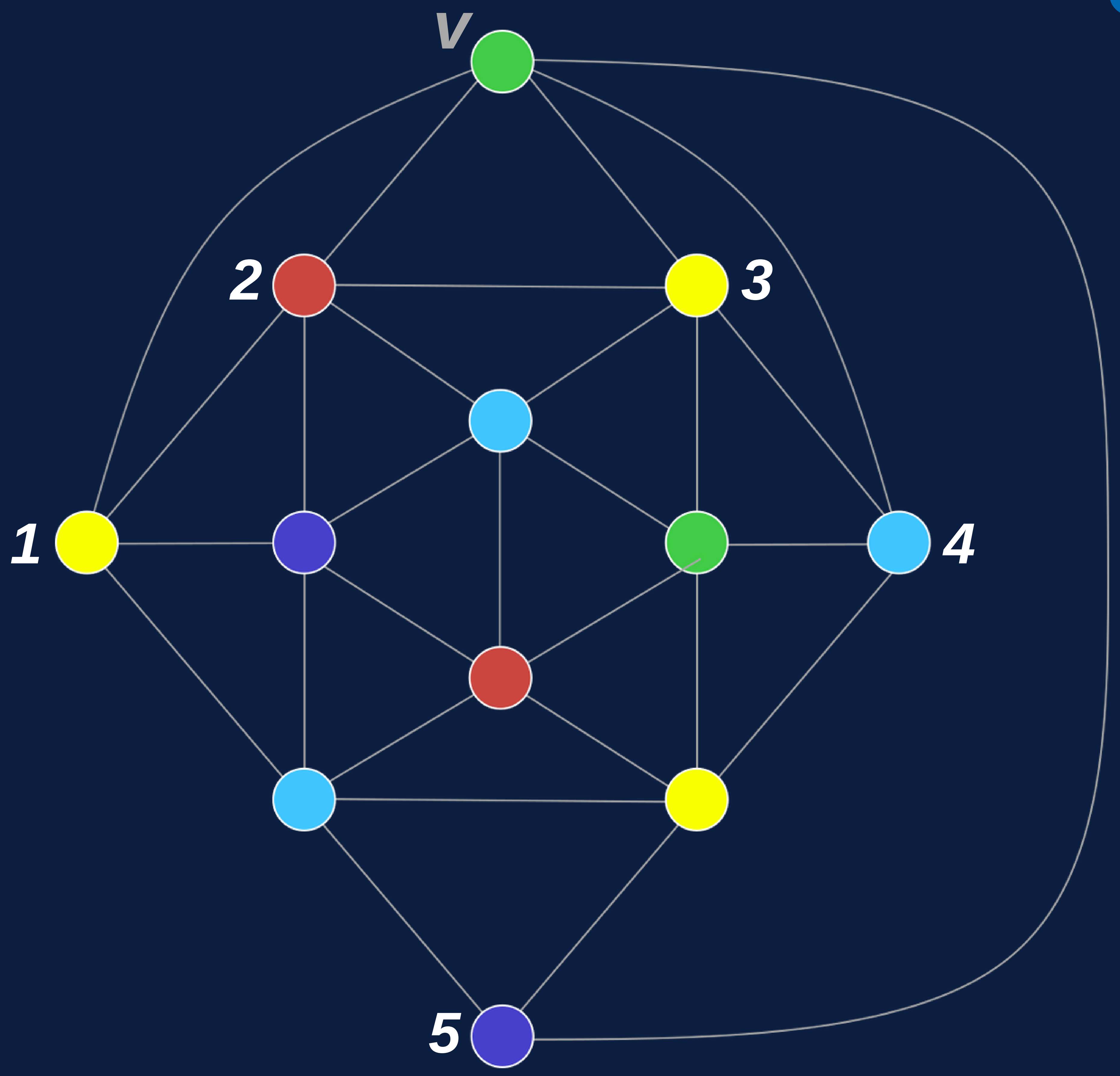




n + 1

Ora possiamo dare a ***v*** il colore libero!

Finché c'è un vertice con al più 5 vicini potremo sempre trovare altri due vertici che non sono connessi e possiamo fare il nostro "swap" di colori.



Esiste sempre un vertice con **5 vicini o meno**?

Invarianza

Ogni grafo planare connesso soddisfa la seguente regola

#facce - #archi + #vertici = 2 (invareiante, caratteristica di Eulero)

... e un **assurdo** per finire:

tutti i vertici di un grafo planare connesso hanno come minimo 6 vicini

(ipotesi assurda)

Ipotesi assurda: *tutti i vertici di un grafo planare hanno come minimo 6 vicini*

Chiamiamo il numero di vicini del generico nodo i-esimo, d_i,
l'ipotesi assurda si traduce quindi nell'equazione $d_i \geq 6$ per ogni i
che va da 1 a v (i è un indice sui vertici del grafo).

#facce = f

#archi = e

#vertici = v

Hand-shaking lemma

$$6v = 6\sum_{i=1}^{v} 1 = \sum_{i=1}^{v} 6 \leq \sum_{i=1}^{v} d_i = 2e \iff e \geq 3v$$

Con osservazioni simili, ad esempio, *"se tutte le facce sono triangoli allora per ogni faccia abbiamo 3 archi e ogni arco divide al più due facce"*, ma un po' di fatica in più, si ottiene che per ogni grafo planare vale: $f \leq 2/3e$

Esiste sempre un vertice con al più 5 vicini

Ipotesi assurda: *tutti i vertici di un grafo planare connesso hanno come minimo 6 vicini*

#facce = f

#archi = e

#vertici = v

dalla ipotesi assurda $\longrightarrow$	$e \geq 3v$	(1)
	$f \leq 2/3e$	(2)
caratteristica di Eulero $\longrightarrow$	$f - e + v = 2$	(3)
sostituiamo (2) in (3)	$2/3e - e + v \geq 2$	
	$-1/3e + v \geq 2$	
moltiplichiamo per *-3*	$e - 3v \leq -6$	

Ma avevamo assunto *(1):* $e - 3v \geq 0$

Ci siamo quindi contraddetti e rifiutiamo quindi l'ipotesi assurda, *q.e.d.* $\square$

ABBIAMO FINITO!

Abbiamo dimostrato che

Dato un **grafo planare**, i suoi vertici possono essere colorati con al più cinque colori, in modo che vertici adiacenti non abbiano lo stesso colore.

E di conseguenza che

Ogni **mappa** può essere colorata usando al più **cinque colori**, senza che regioni adiacenti abbiano lo stesso colore.

MA…

Volevamo dimostrare il teorema dei 4 colori!

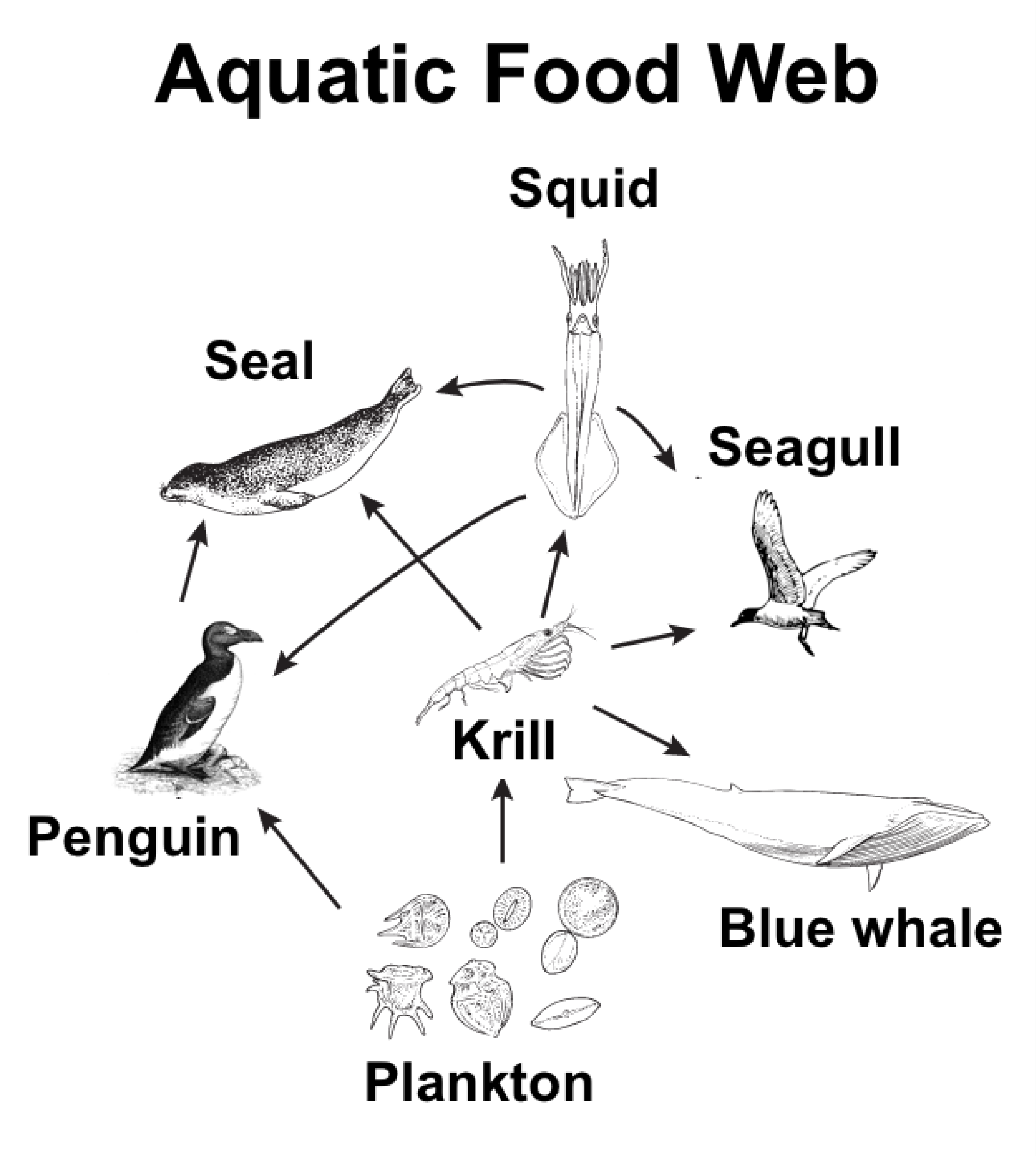
La sua dimostrazione è arriavata soltanto nel 1976, con Appel, Haken e l'uso del **computer**!

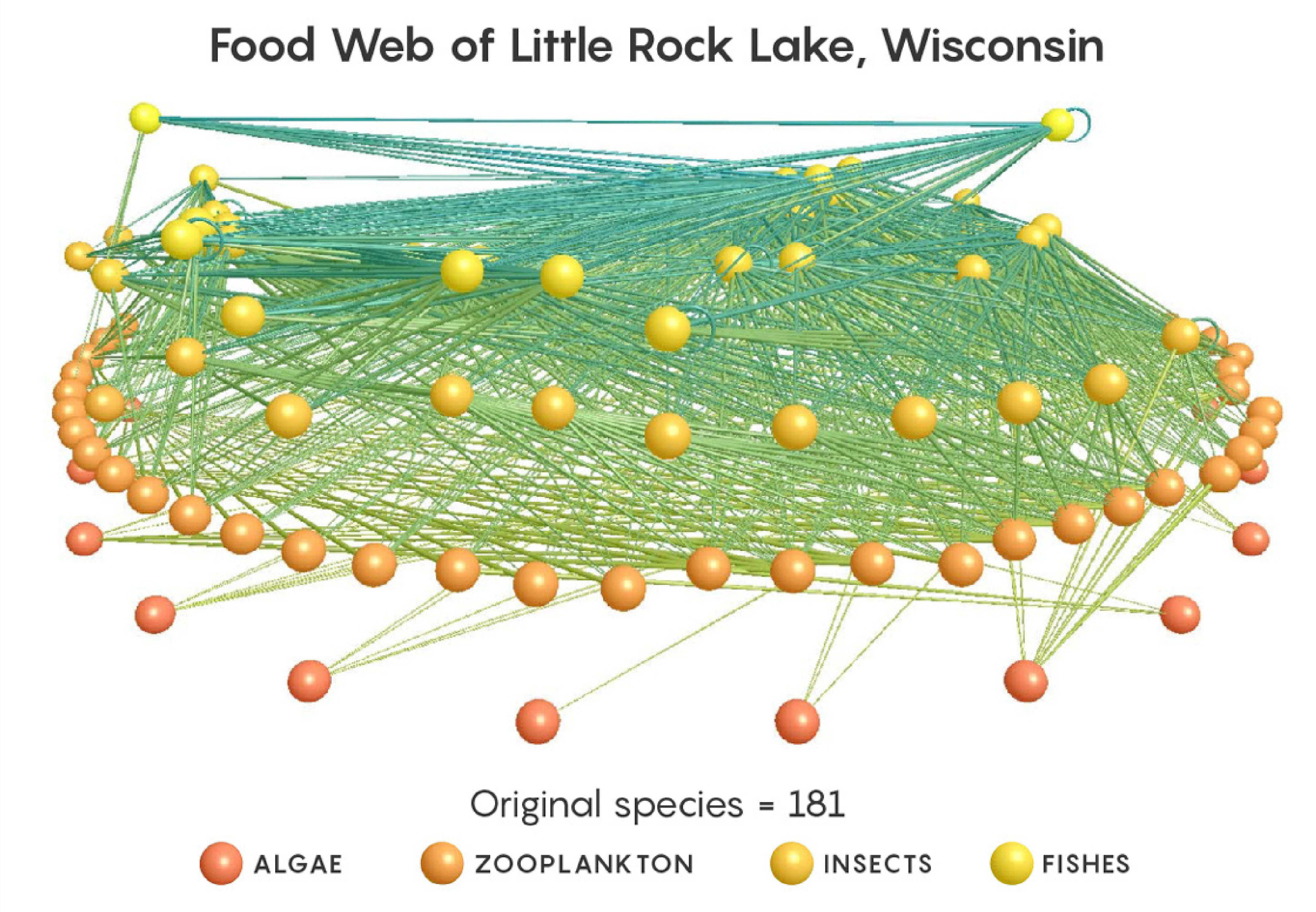
GRAFI E RETI

Quello che abbiamo appena dimostrato è un importante teorema della **teoria dei grafi**.
Dalla teoria dei grafi alla Network Science, la scienza delle reti o delle connessioni.

References

Newman, M. (2018). *Networks.* Oxford university press.
Caldarelli, G. (2016). *Scienza delle reti.* Egea.


Aquatic Food Web
Squid
Seal
Seagull
Krill
Penguin
Blue whale
Plankton


Food Web of Little Rock Lake, Wisconsin
Original species = 181
ALGAE
ZOOPLANKTON
INSECTS
FISHES

SOCIAL

facebook, friendship, Zachary's Karate Club Network

TRANSPORTATION & INFRASTRUCTURE

trains, airports, buses, underground; roads, powergrids, internet

BIOLOGY

food webs, protein-protein, brain (connectomes)

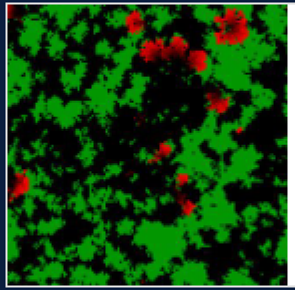
OTHERS

Collaboration networks, economic networks...

SISTEMI COMPLESSI E RETI COMPLESSE

Le reti come rappresentazione di sistemi complessi.

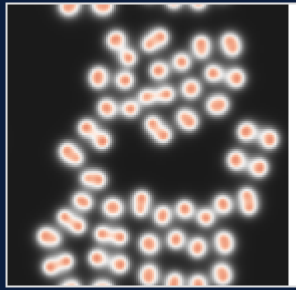
SISTEMI COMPLESSI E RETI COMPLESSE



Critically Inflammatory

Spatial patterns, dynamics and criticality in forrest fire dynamics

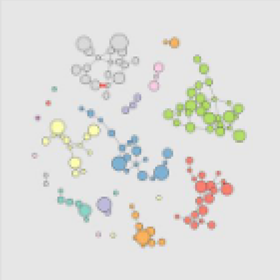
DirkBrockmann / Nov 14, 2018



Hopfed Turingles

This reaction-diffusion system generates a variety of spatio-temporal patterns

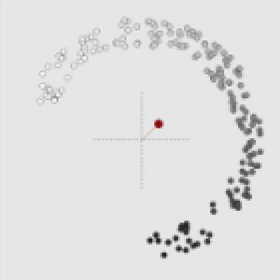
DirkBrockmann / Dec 30, 2018



Echo Chambers

A dynamic network that explains the emergence of groups of uniform opinion

DirkBrockmann / Jul 26, 2018



Ride my Kuramotocycle!

Synchronization of Phase-Coupled Oscillators

DirkBrockmann / Apr 14, 2018

https://www.complexity-explorables.org/

GRAZIE PER L'ATTENZIONE

CI SONO DOMANDE?

@GiuliaTtt

gbertagnolli.github.io

giulia.bertagnolli@unige.it