Giulia Bertagnolli

University of Trento & CoMuNe Lab - FBK

SEMPLICEMENTE... RETI COMPLESSE!

Orienta Settimana Orientamento UniTn - 22 agosto 2019

@GiuliaTtt

gbertagnolli.github.io

NETWORK SCIENCE*

*Scienza delle Reti,
Sicenza delle Connessioni

PONTI, MAPPE E COLORI

Problemi e Come Risolverli

Teoremi e Dimostrazioni

RETI (NETWORKS)

Terminologia ed esempi

ESSERE MATEMATICI

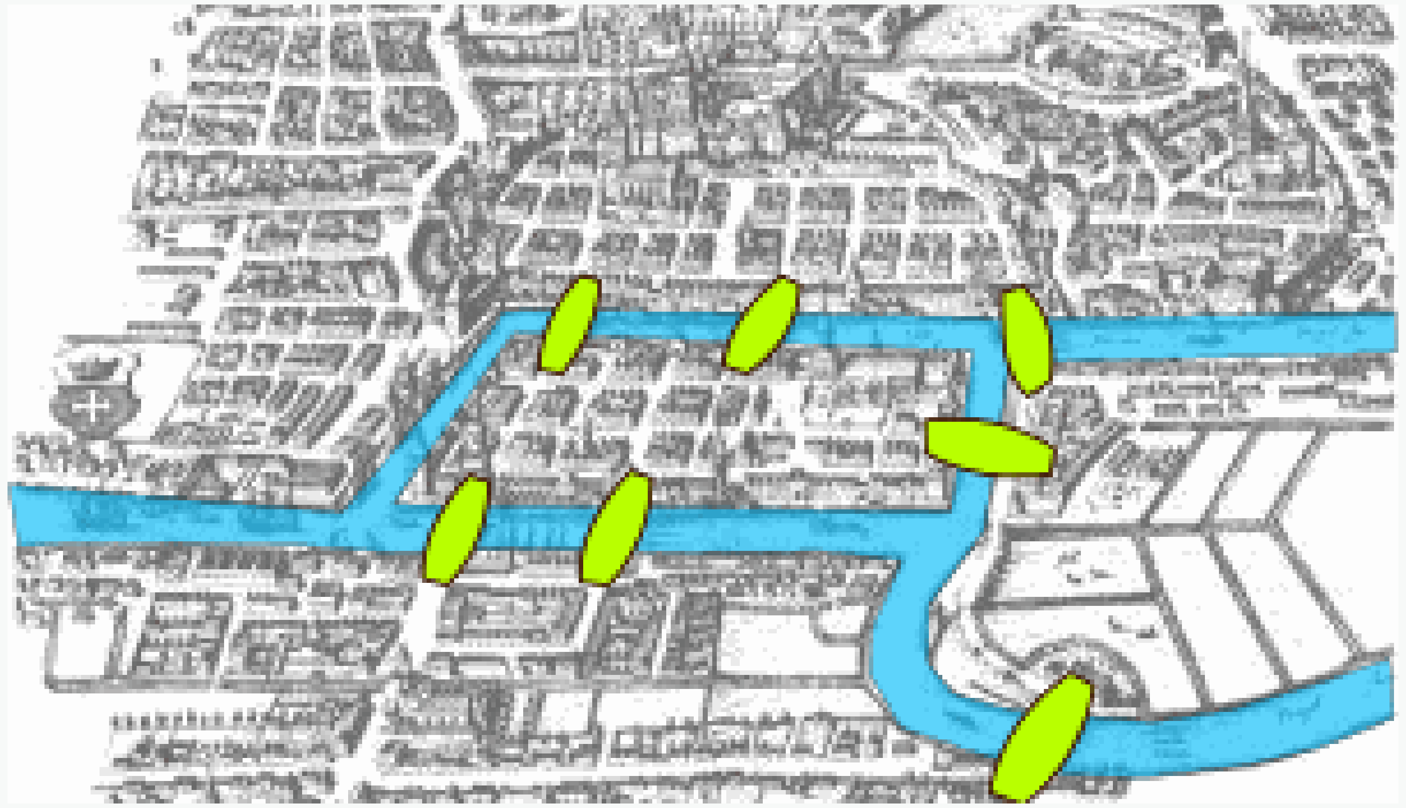
Non solo calcoli (o proprio per niente!)

ESSERE DOTTORANDI

Prospettive dopo l'Università e Vita di un(a) PhD

DOMANDE E APPROFONDIMENTI

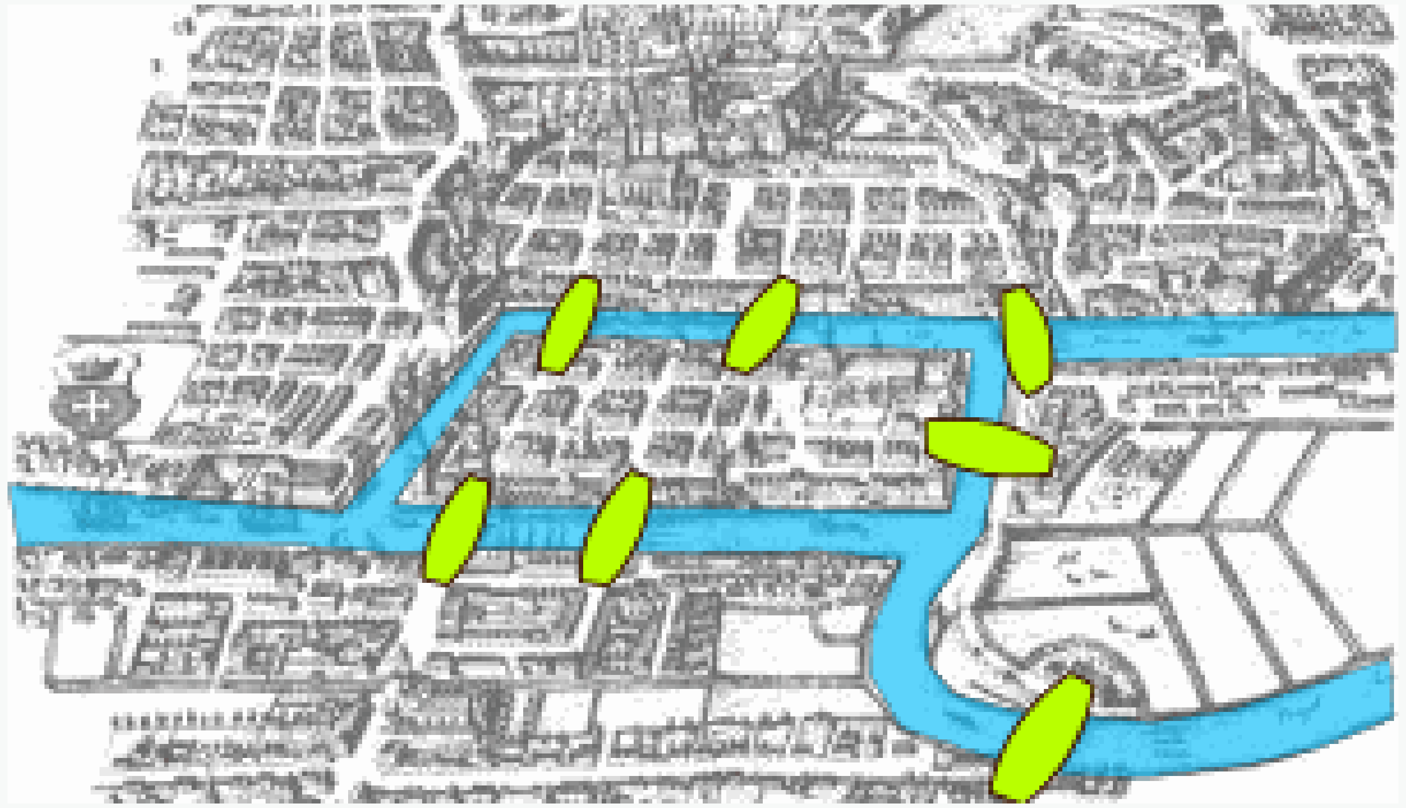
Spazio a Voi!

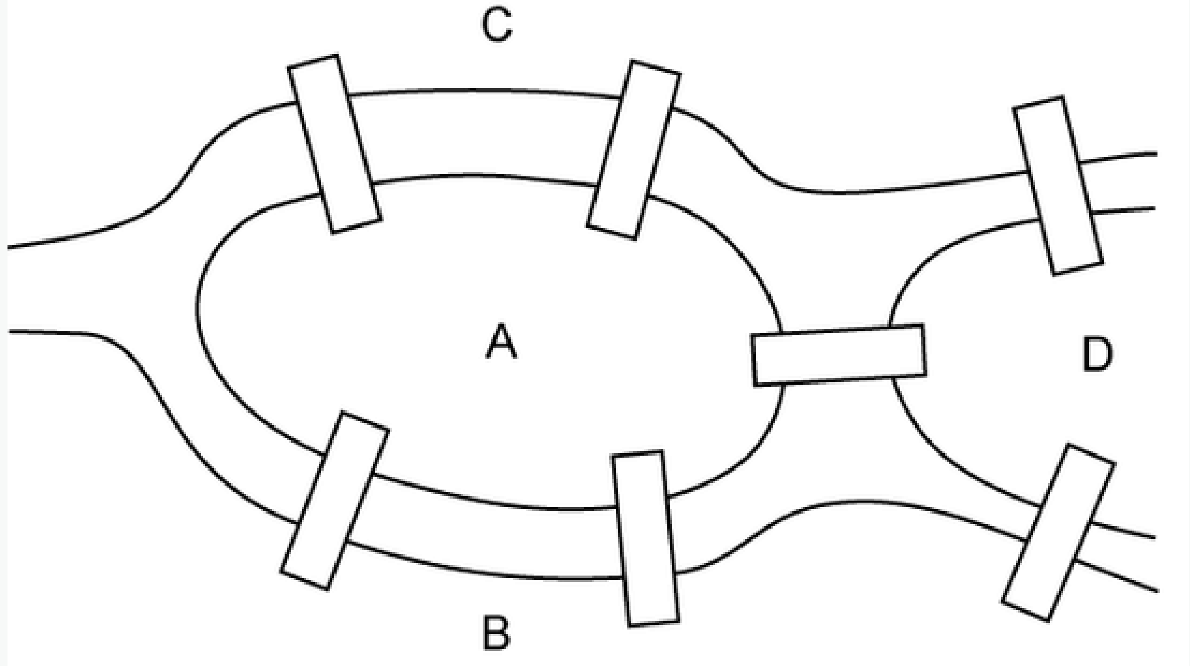


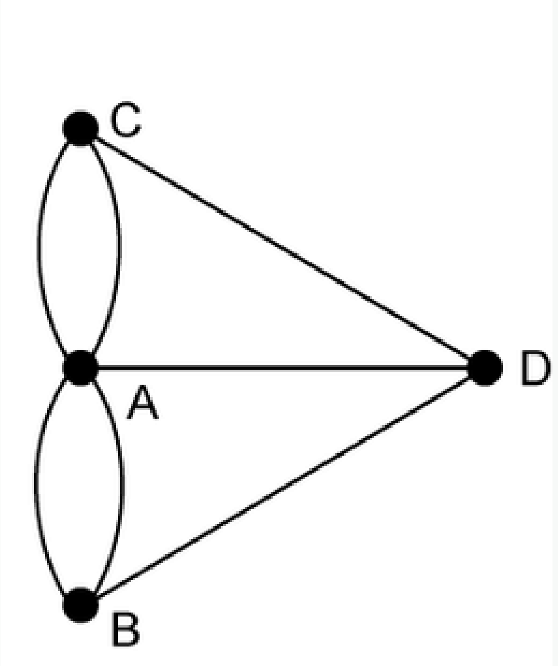
I Ponti di Königsberg

LEONHARD EULER (1736)

E' possibile fare un giro della città
di Königsberg, attraversando tutti i ponti una e
una sola volta (tornando al punto di partenza)?







Da un **problema** alla sua **astrazione**!

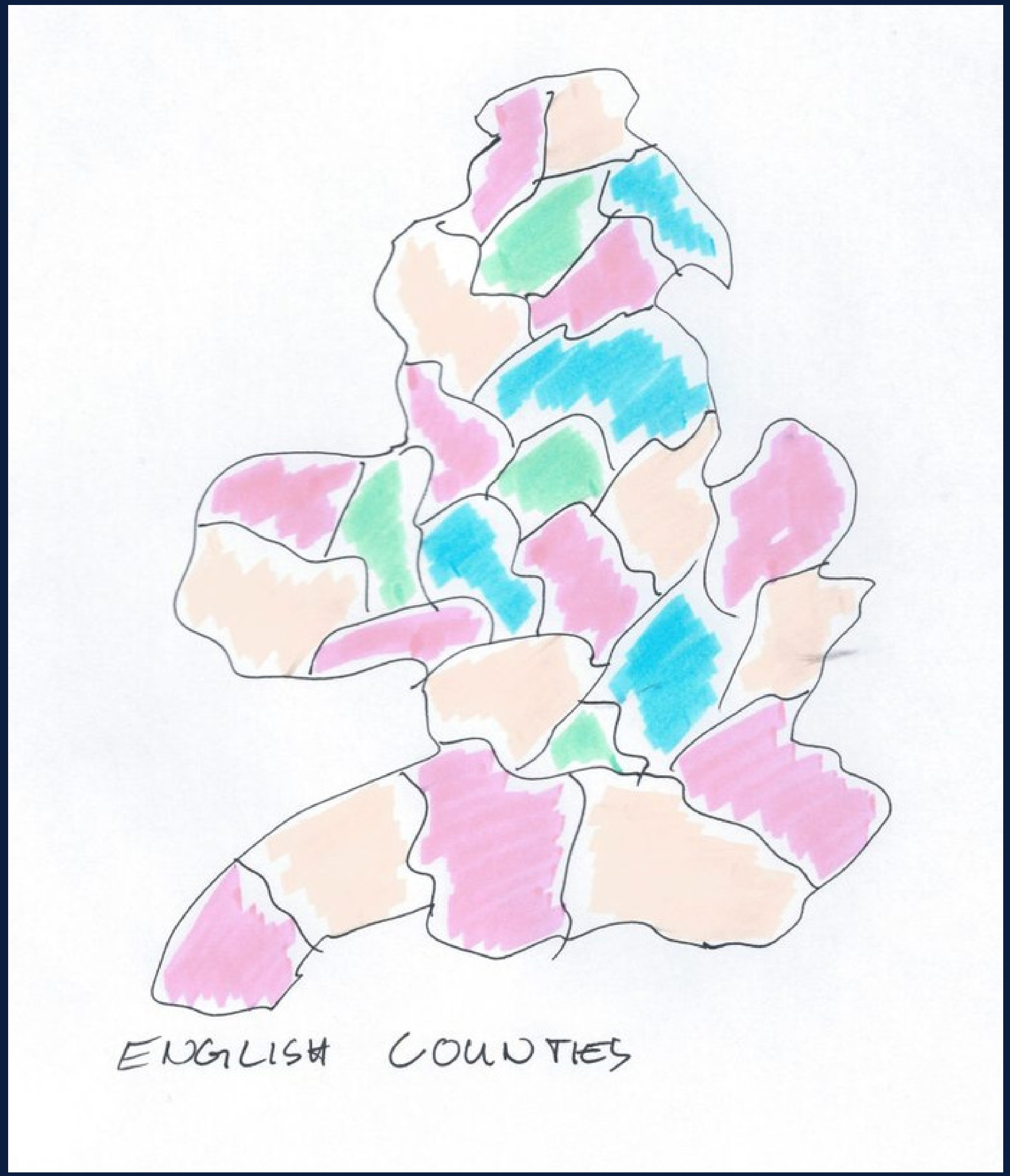
MAPPE E COLORI

Il Teorema dei Quattro Colori

The Four Colour Map Theorem

Problema, intuizione, astrazione

Francis Guthrie (1852)



4 colori

Funzionerà **per ogni** mappa?

Problema

Francis e i 4 colori

Intuizione

Difficile...
Problema irrisolto
per più di un secolo!

Semplificazione

Teorema dei 5 colori

IL TEOREMA DEI CINQUE COLORI

Dato un piano suddiviso in regioni connesse, queste possono essere colorate utilizzando **non più di cinque colori**, in modo tale che *non esistono due regioni adiacenti con lo stesso colore.* *

*References

Wikipedia, Teorema dei cinque colori

Dimostriamolo!

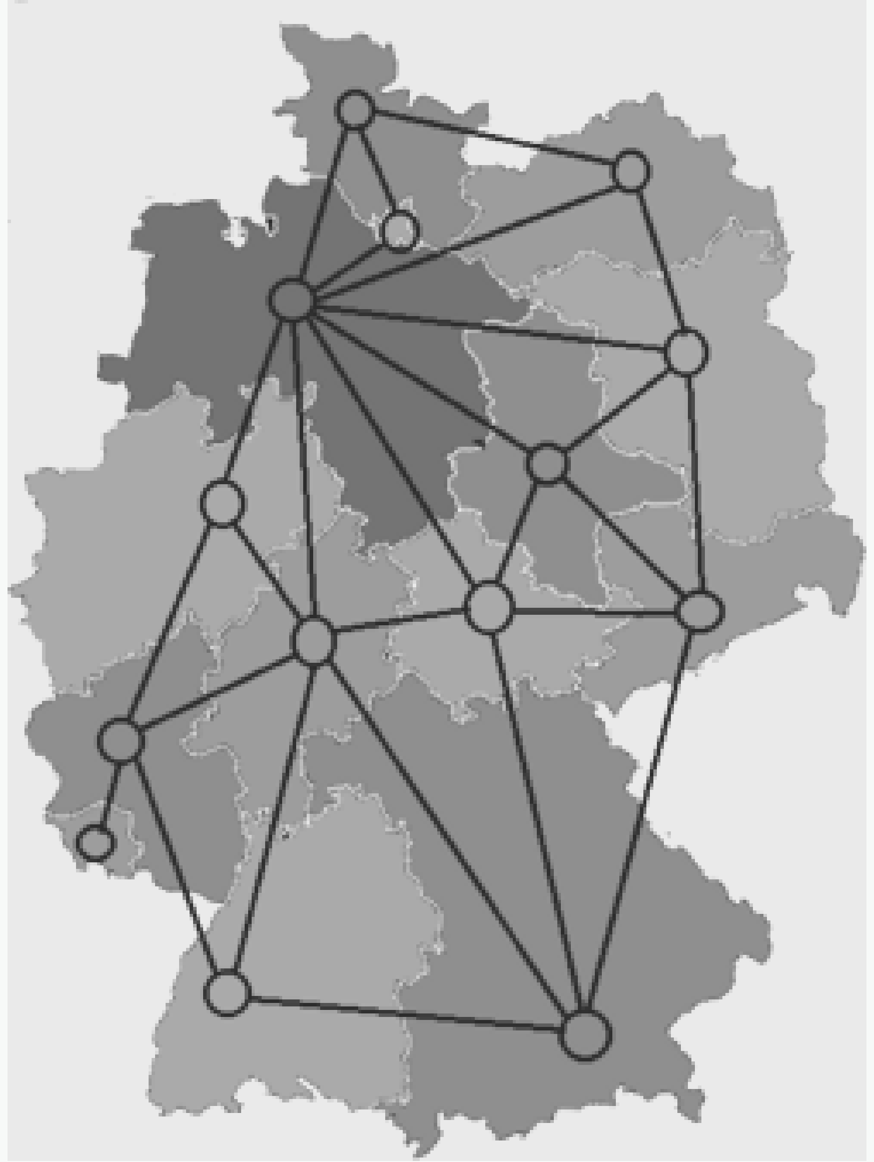
Ingredienti:

0. astrazione
1. induzione
2. assurdo
3. invarianza

Astrazione

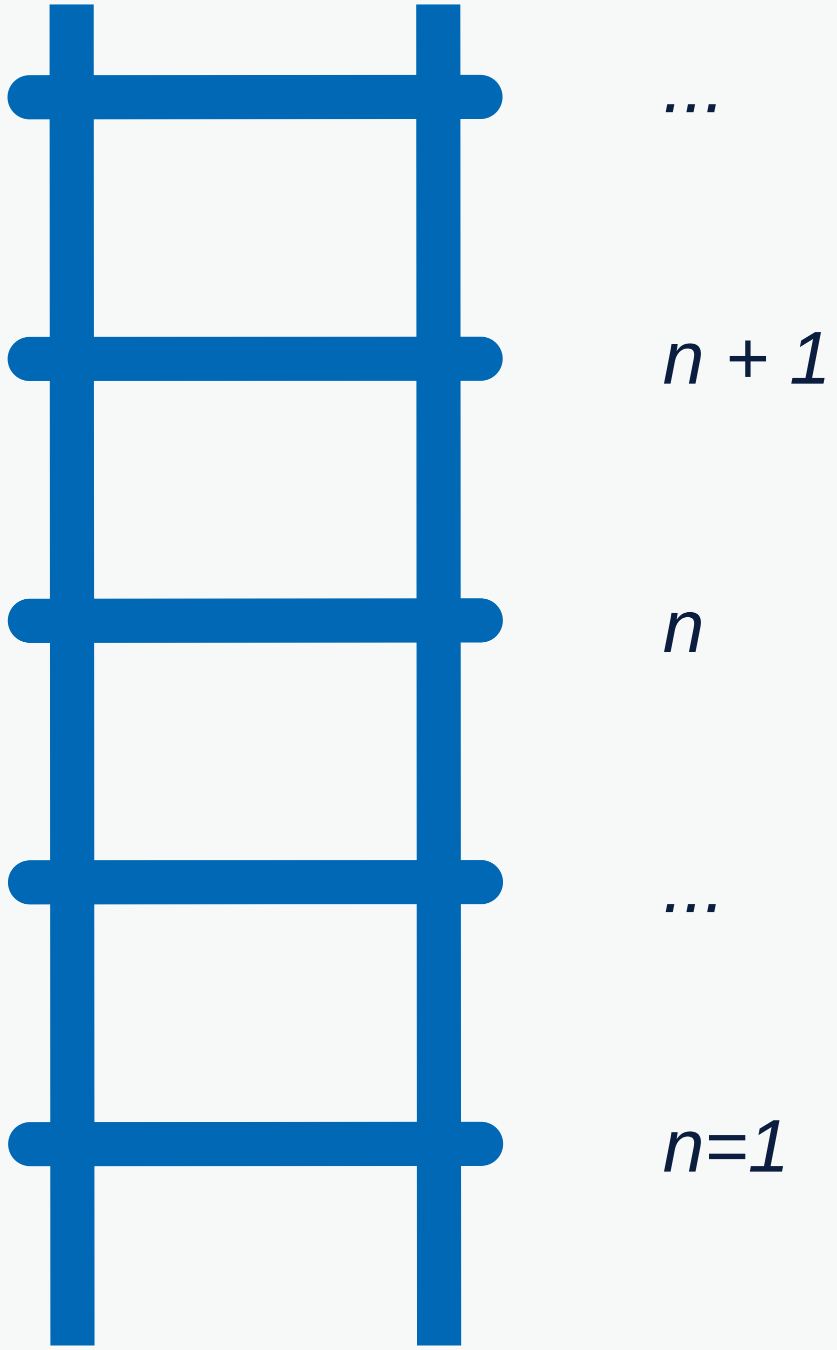
Dato un **grafo planare**, i suoi vertici possono essere colorati con al più cinque colori, in modo che vertici adiacenti non abbiano lo stesso colore.

grafo = rete (EN - network)
grafo **planare** = che può essere disegnato su di un foglio (un piano) senza che gli archi (edges, links) si intersechino



Induzione

Se riesci a fare il primo gradino, riuscirai a fare ogni altro gradino **dopo di quello.**



Assurdo

Non esiste il numero più grande.

Assumiamo il suo opposto:

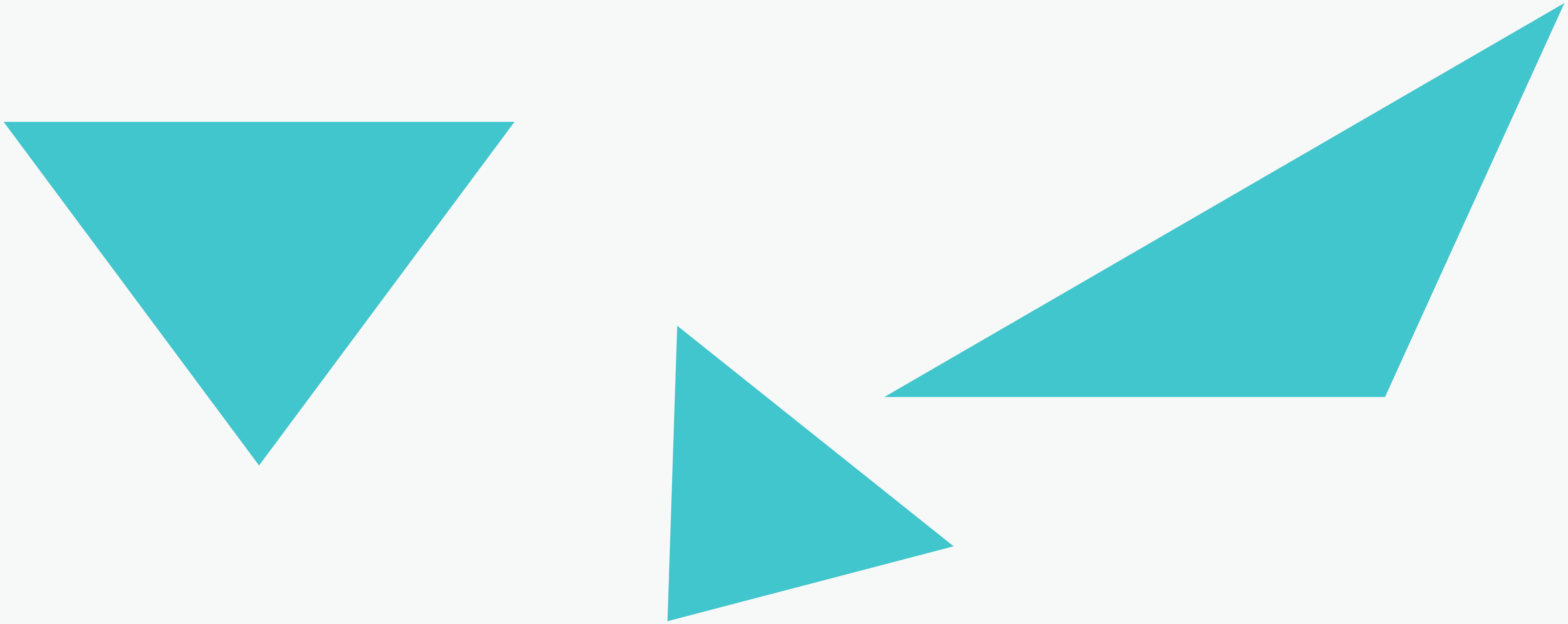
Esiste il numero più grande,
chiamiamolo ***M***

E... arriviamo ad un **assurdo**!

$M > M + 1$

$0 > 1$

Invarianza



Dimostrazione del Teorema dei 5 colori

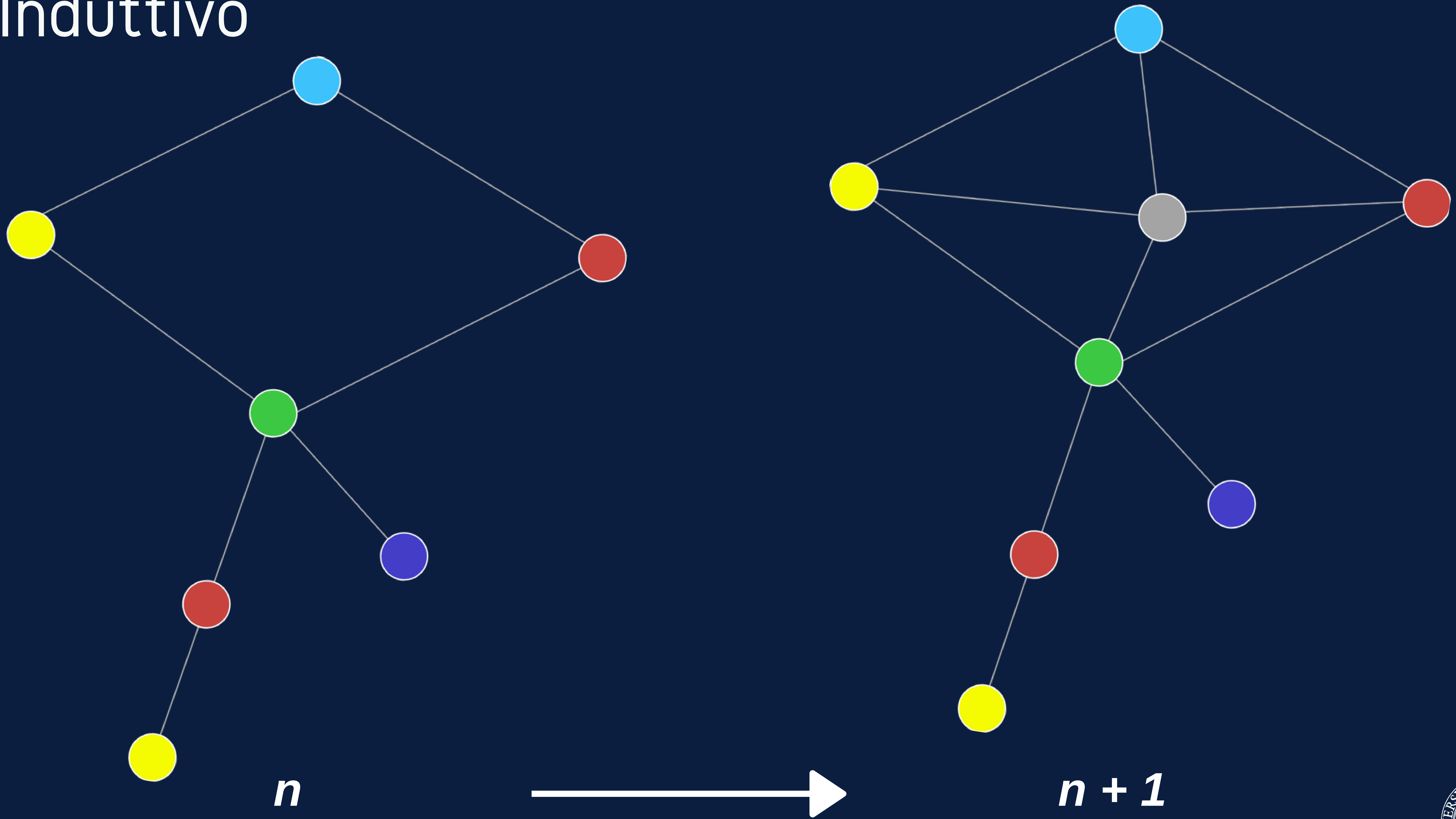
Induzione sul numero ***n*** di nodi.

Ogni grafo con ***n=1*** nodi può essere colorato con al più cinque colori

Passo Induttivo

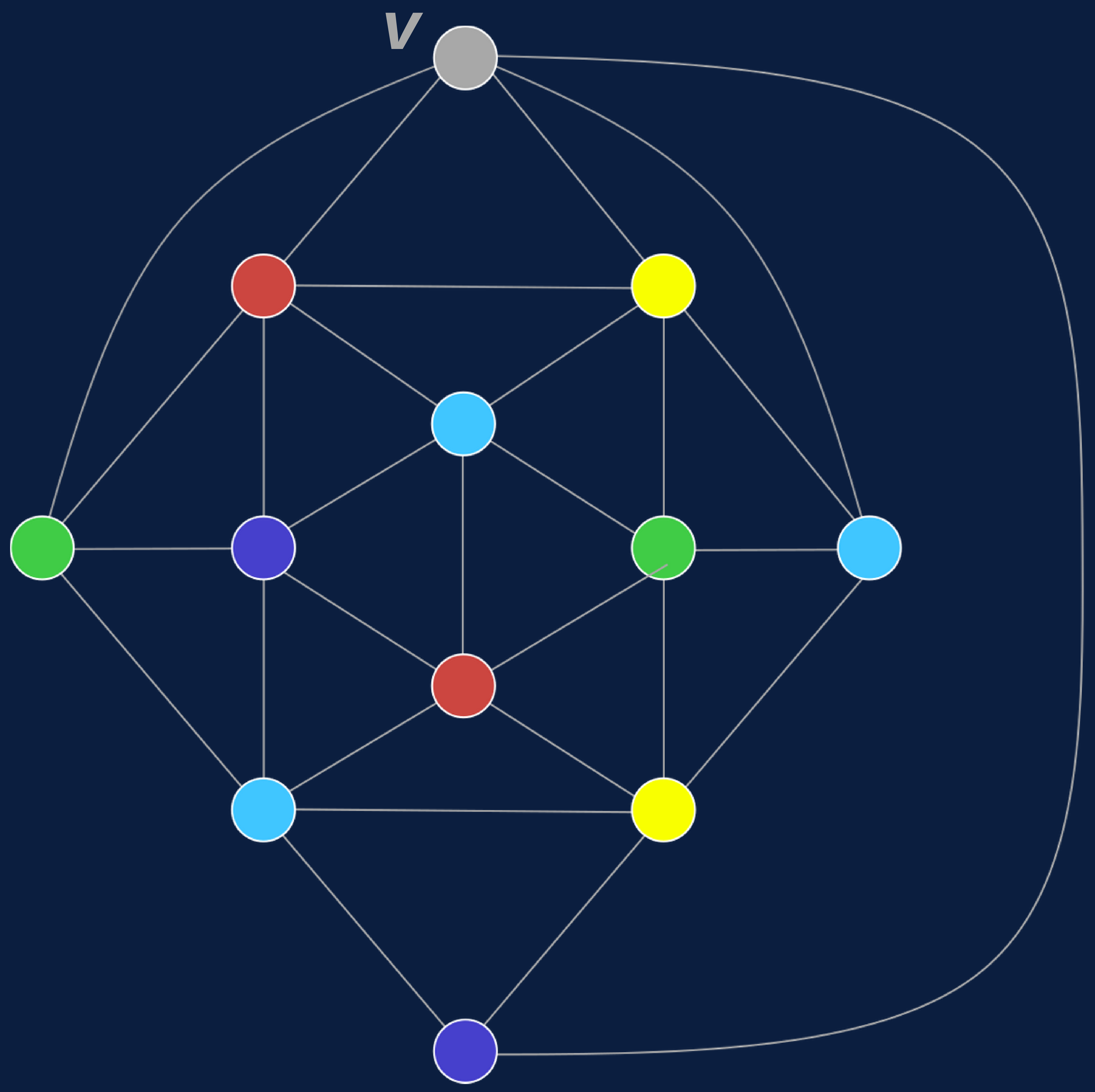
Assumiamo che ogni grafo con n nodi sia colorabile con al più cinque colori e dimostramo che un grafo con n+1 nodi può ancora essere colorato con cinque colori.

Passo Induttivo



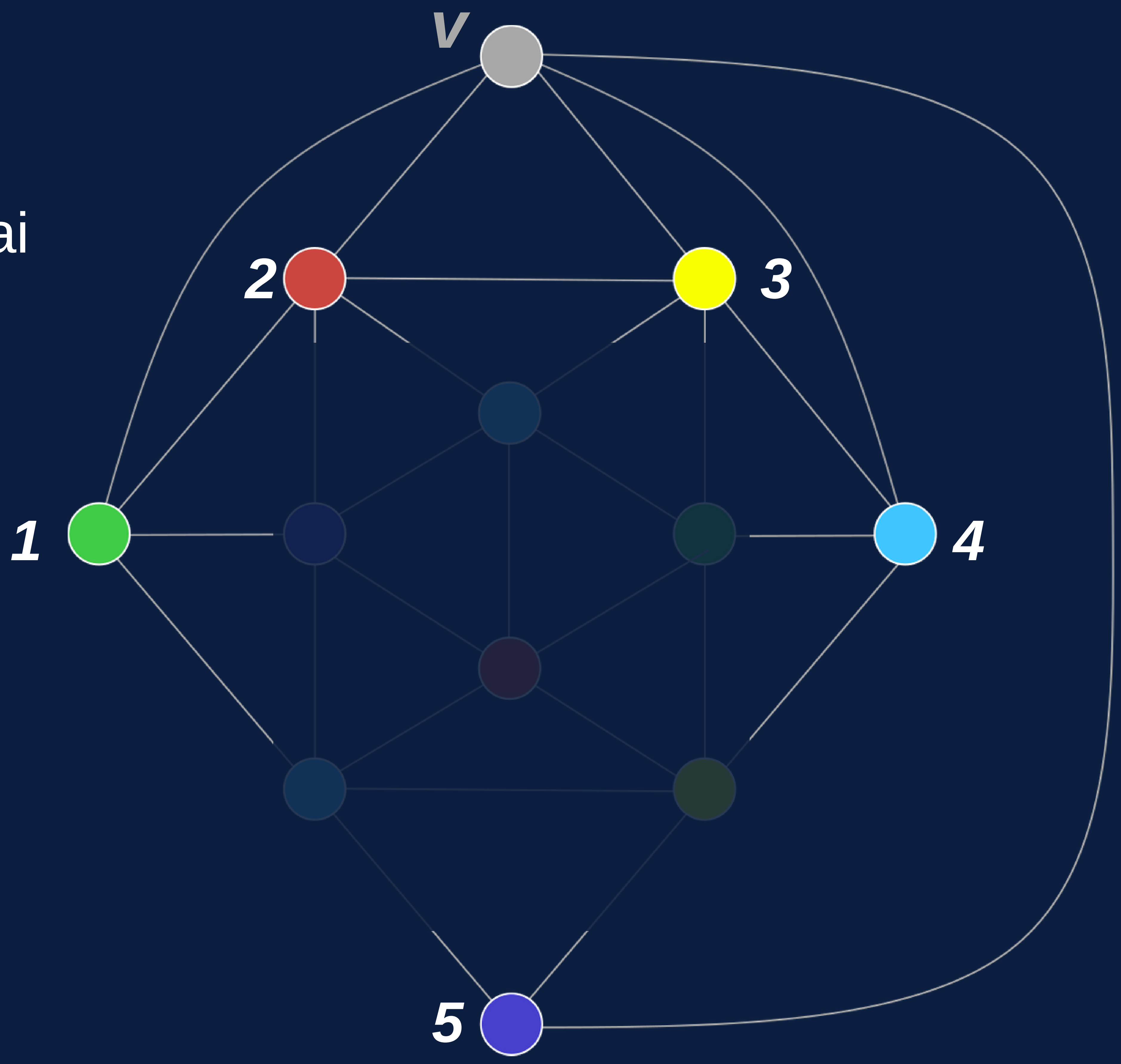
$n + 1$

Rimuovendo $\boldsymbol{v}$, otteniamo un grafo con $\boldsymbol{n}$ vertici e 5- colorabile



n + 1

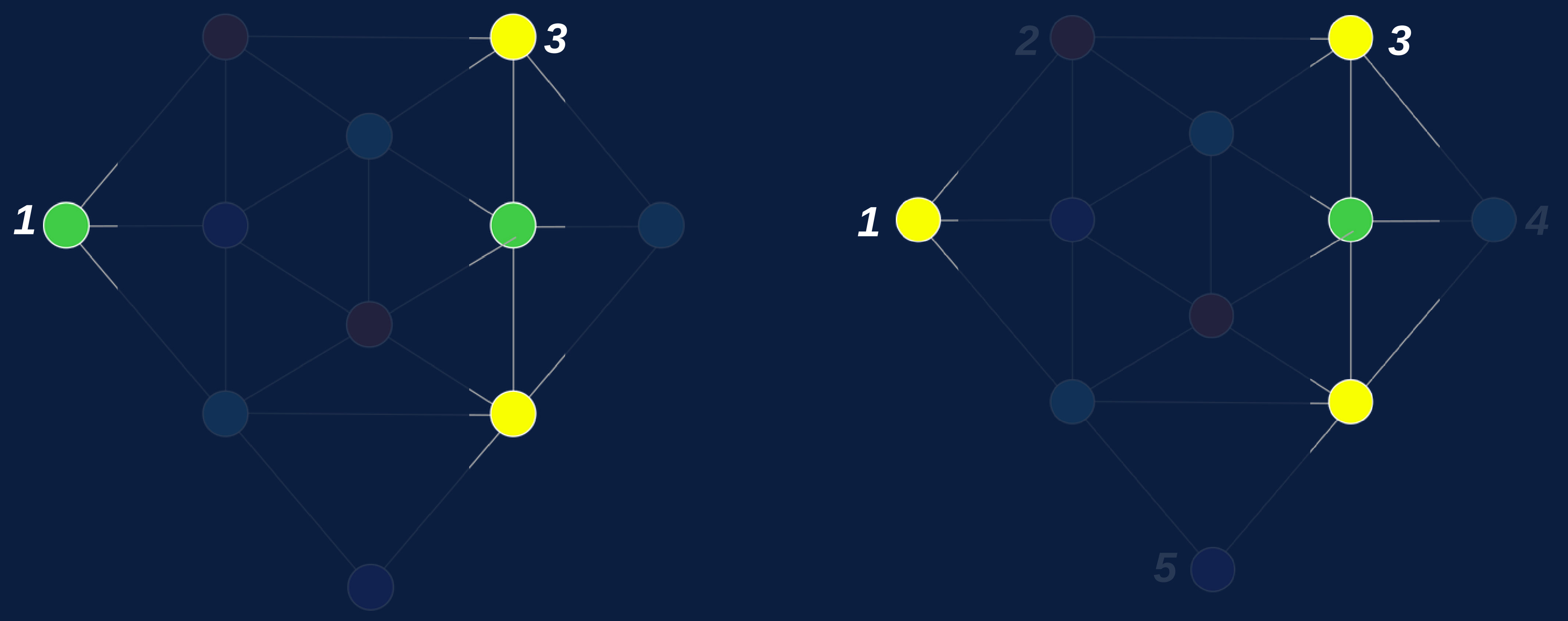
Tutti i colori sono presi dai 5 vicini del nodo ***v***



$n + 1$

Guardiamo ai vertici ***1*** e ***3***

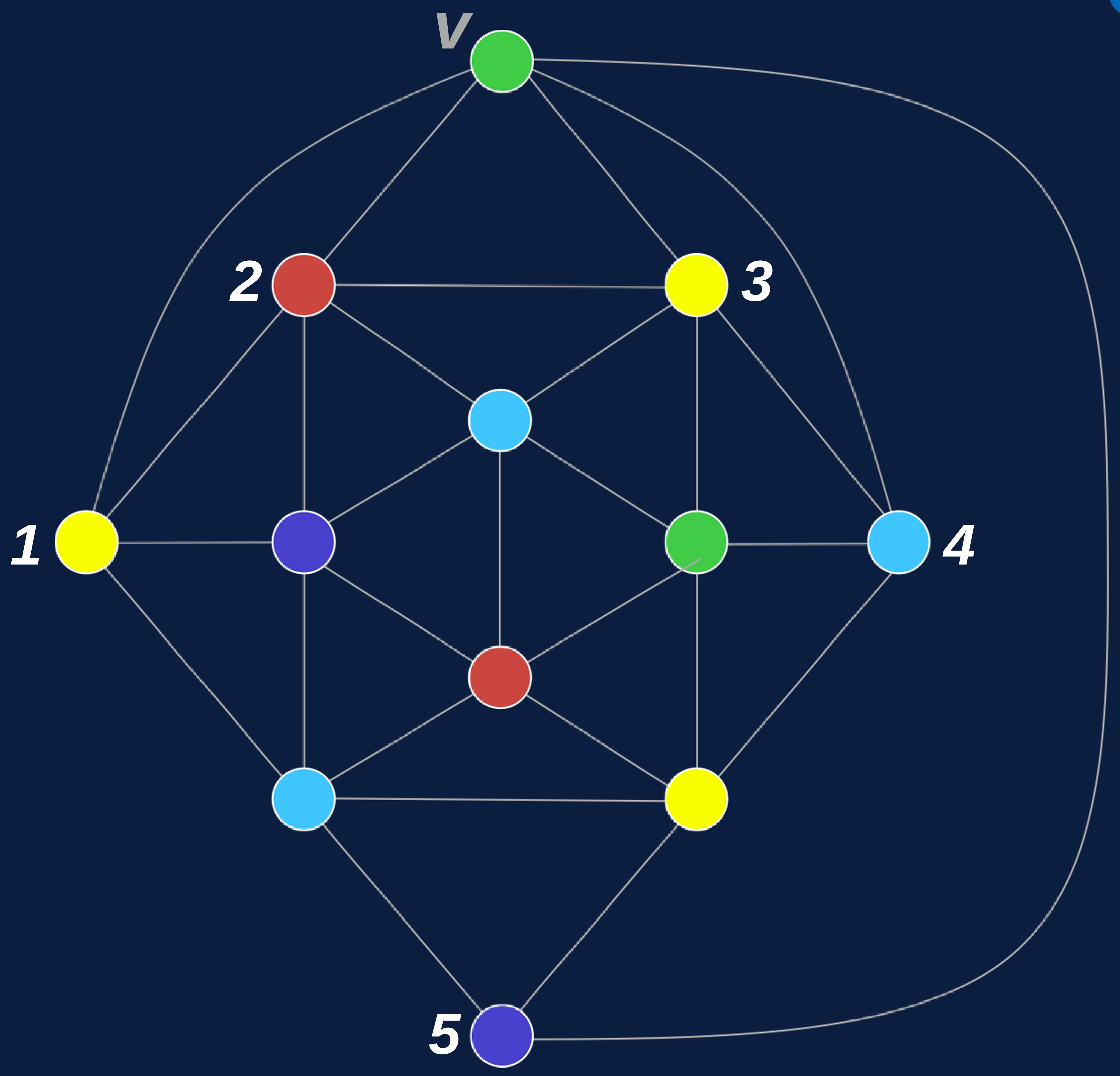
1 non è connesso ad alcun vertice giallo, per cui possiamo colorarlo di giallo!



n + 1

Ora possiamo dare a ***v*** il colore libero!

Finché c'è un vertice con al più 5 vicini potremo sempre trovare altri due vertici che non sono connessi e possiamo fare il nostro "swap" di colori.



Esiste sempre un vertice con **5 vicini o meno**?

Invarianza

Ogni grafo planare connesso soddisfa la seguente regola

#facce - #archi + #vertici = 2 (invareiante, caratteristica di Eulero)

... e un **assurdo** per finire:

tutti i vertici di un grafo planare connesso hanno come minimo 6 vicini

(ipotesi assurda)

Esiste sempre un vertice con al più 5 vicini

tutti i vertici di un grafo planare connesso hanno come minimo 6 vicini

(ipotesi assurda) $e \geq 3v$

$f \leq 2/3e$

(caratteristica di Eulero) $f - e + v = 2$

$2/3e - e + v \geq 2$

$-1/3e + v \geq 2$

$e - 3v \leq -6$

ma avevamo anche $e - 3v \geq 0$

#facce = f

#archi = e

#vertici = v

ABBIAMO VINTO!

Abbiamo dimostrato che

Dato un **grafo planare**, i suoi vertici possono essere colorati con al più cinque colori, in modo che vertici adiacenti non abbiano lo stesso colore.

E di conseguenza che

Ogni **mappa** può essere colorata usando al più **cinque colori**, senza che regioni adiacenti abbiano lo stesso colore.

MA...

Volevamo dimostrare il teorema dei 4 colori!

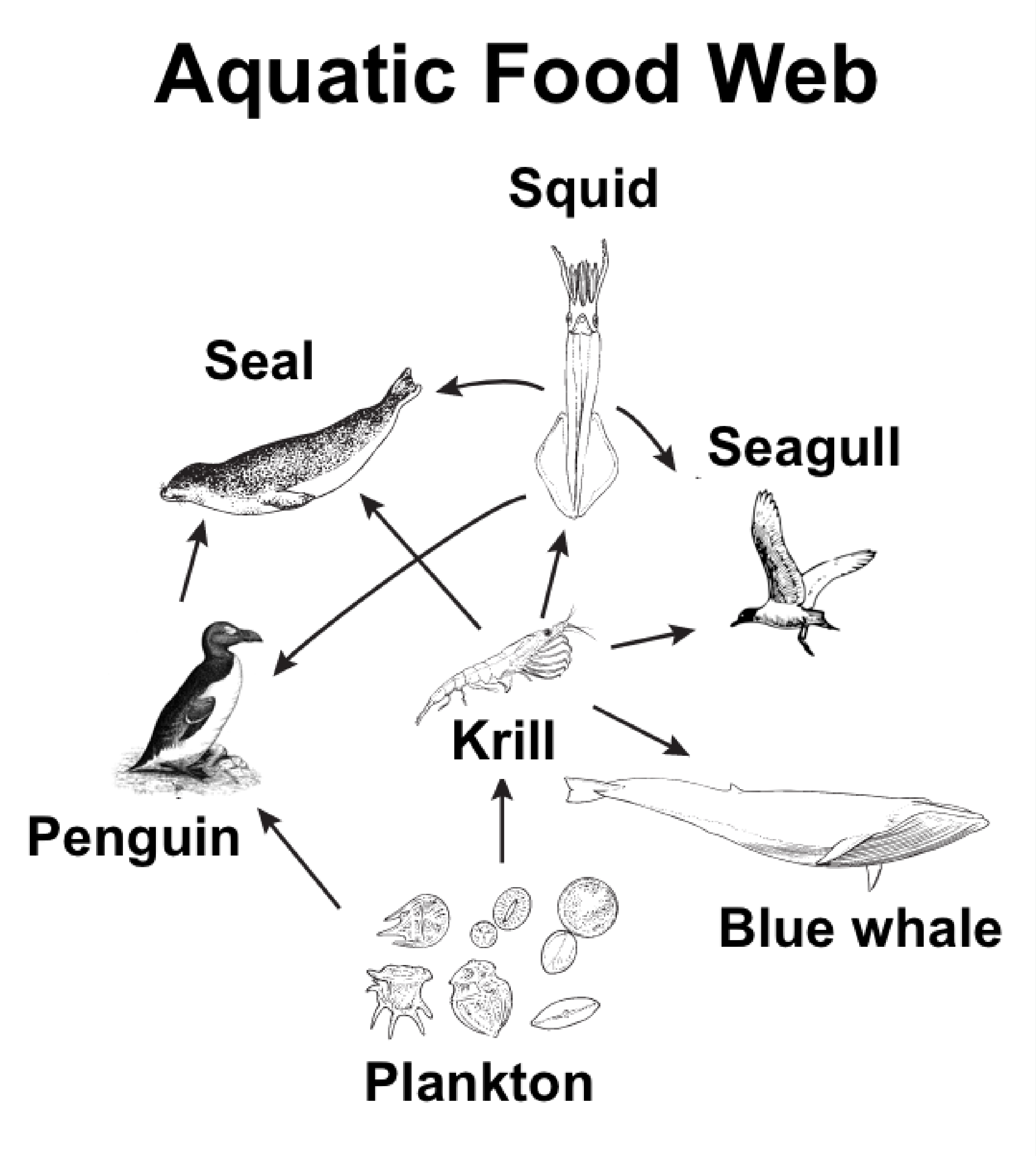
La sua dimostrazione è arriavata soltanto nel 1976, con Appel, Haken e l'uso del **computer**!

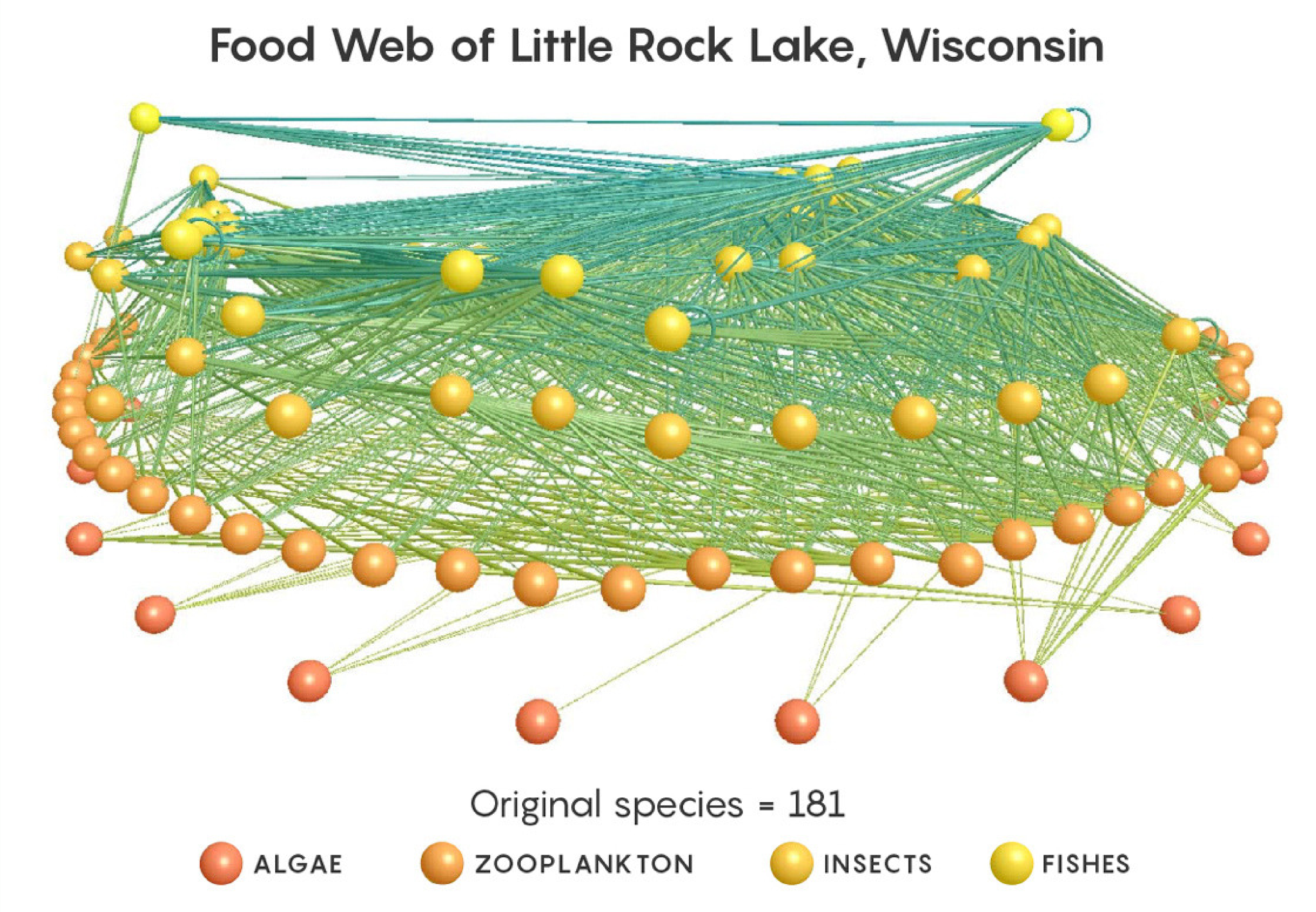
GRAFI E RETI

Quello che abbiamo appena dimostrato è un importante teorema della **teoria dei grafi**.
Dalla teoria dei grafi alla Network Science, la scienza delle reti o delle connessioni.

References

Newman, M. (2018). *Networks.* Oxford university press.
Caldarelli, G. (2016). *Scienza delle reti.* Egea.


Aquatic Food Web
Squid
Seal
Seagull
Krill
Penguin
Blue whale
Plankton


Food Web of Little Rock Lake, Wisconsin
Original species = 181
ALGAE
ZOOPLANKTON
INSECTS
FISHES

SOCIAL

facebook, friendship, Zachary's Karate Club Network

TRANSPORTATION & INFRASTRUCTURE

trains, airports, buses, underground; roads, powergrids, internet

BIOLOGY

food webs, protein-protein, brain (connectomes)

OTHERS

Collaboration networks, economic networks…

SISTEMI COMPLESSI E RETI COMPLESSE

Le reti come rappresentazione di sistemi complessi.

SISTEMI COMPLESSI E RETI COMPLESSE

https://www.complexity-explorables.org/

Grafi, reti

Matematica, fisica, biologia, scienze sociali...

E' un mondo multi-disciplinare!

e.g. CoMuNe Lab - FBK

Studiare Matematica all'Università

Fare un Dottorato

Ricerca, mondo accademico e del lavoro

THANK YOU FOR YOUR ATTENTION

QUESTIONS?

@GiuliaTtt

gbertagnolli.github.io

giulia.bertagnolli@unitn.it